

Multivariate Splineapproximation auf Gebieten

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr.rer.nat.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Math. Nada Sissouno
aus Darmstadt

Referent:
Korreferent:
Tag der Einreichung:
Tag der mündlichen Prüfung:

Prof. Dr. U. Reif
Prof. Dr. K. Höllig
26. Mai 2011
12. August 2011

Darmstadt 2011
D17

Danksagung

Ich werde hier nicht anfangen, allen Personen zu danken, die mir in der ganzen Zeit durch ihre Freundschaft beiseite gestanden haben. Sie wissen, dass ich dankbar bin und mich über ihre Freundschaft freue.

Es gibt allerdings ein paar Personen, welchen ich ihre besondere Unterstützung in meiner Promotionszeit hoch anrechne. Herrn Prof. Dr. Ulrich Reif möchte ich zuallererst dafür danken, dass er mir überhaupt die Möglichkeit gegeben hat, unter seiner Betreuung meine Dissertation zu schreiben. Durch seine Kreativität und die Diskussionen mit ihm konnte ich sehr viel lernen. Ich möchte auch Herrn Prof. Dr. Klaus Höllig für die Übernahme des Korreferates danken. Ich danke Bernhard Mößner, der seine Programme zur Verfügung gestellt und mit mir einige hilfreiche Diskussionen geführt hat. Ein besonderer Dank geht an meine Zimmerkollegin Jennifer Prasiswa. Sie stand mir mit Rat und Tat während aller Höhen und Tiefen zur Seite. Auch dafür, dass sie meine Arbeit Korrektur gelesen hat, bin ich dankbar. An dieser Stelle auch ein Danke an Herrn Prof. Dr. Karsten Große-Brauckmann.

Meiner lieben Christine und auch Nadiem und Stefan ein großes Danke dafür, dass auch sie sich durch meine Arbeit gequält haben und sie alle drei, jeder auf seine spezielle Art und Weise, eine Bereicherung für mein Leben sind. Auch wenn sie nicht direkt beteiligt war, so möchte ich doch auch meiner Mutter danken. Sie ist eine starke und lebensfrohe Frau, die mir diesen Lebensweg überhaupt erst ermöglicht hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Approximation	1
1.2	Univariate Splineapproximation	2
1.3	Multivariate Splineapproximation auf Gebieten	3
1.3.1	Tensorprodukt-Splineapproximation	4
1.4	Inhaltsübersicht	6
2	Bestehende Theorie	7
2.1	Sobolevräume und Gebiete	7
2.2	Bramble-Hilbert Lemma	13
2.2.1	Lipschitzgraph Gebiete und Stetigkeitsmoduli	14
2.2.2	Verallgemeinerte Graphgebiete	17
2.3	B-Splines	19
2.3.1	Univariate Splines	19
2.3.2	Multivariate Splines	21
2.3.3	Approximation mit Splines	26
2.4	Normierte B-Splines	30
2.5	eB-Splines	35
3	Splineapproximation nach Fortsetzung	41
3.1	Isotroper Fall	41
3.1.1	Gebiete	42
3.1.2	Fortsetzung	43
3.1.3	Approximation	44
3.2	Anisotroper Fall	46
3.2.1	Gebiete	47
3.2.2	Fortsetzung	50
3.2.3	Approximation	52
3.3	Fazit	55
4	Kondensierte B-Splines	57
4.1	Univariate Splines	58
4.1.1	Konstruktion	58
4.1.2	Stabilität	70
4.2	Bivariate Splines	77

4.2.1	Konstruktion	77
4.2.2	Stabilität	93
4.2.3	Approximation	98
4.2.4	Ableitungen des Fehlers	107
4.3	Verallgemeinerungen	117
4.3.1	Gebiete	117
4.3.2	Höhere Dimensionen	120
4.3.3	Variante kondensierter B-Splines	121
5	Beispiele	125
5.1	Stabilität auf der Kreisschreibe	126
5.2	Approximation	128
5.2.1	Approximationsordnung	129
5.2.2	Unabhängigkeit von den Gitterweiten	130
6	Fazit und Ausblick	133
	Literaturverzeichnis	137

Abbildungsverzeichnis

2.1	Λ -Polynome	8
2.2	Beispiel 2.29	24
2.3	Beispiel 2.30	25
2.4	Beispiel 2.35	30
2.5	Beispiel 2.38	32
2.6	Beispiele durch Normierung stabilisierbarer B-Splines	33
2.7	Beispiel 2.39	33
2.8	Rechteckkonstellation in Beispiel 2.39	34
2.9	Problemfall im Bivariaten	35
2.10	Innere und äußere B-Splines	36
3.1	Beispiele von Gebieten mit $\partial\Omega \notin \text{Lip } 1$	43
4.1	Optimierung von Beispiel 2.35	57
4.2	Uniformes Kondensieren, univariat	59
4.3	Rand-B-Spline, univariat	61
4.4	B-Splines über beliebigen univariaten Gebieten	66
4.5	Lokal uniform kondensierter B-Spline	67
4.6	Optimierung von Beispiel 2.39	78
4.7	Konkave zusammenhängende Schnitte	81
4.8	Kondensierter Träger	82
4.9	Beweis Lemma 4.24, 1. Fall	82
4.10	Beweis Lemma 4.24, 2. Fall	83
4.11	Randfreie Fläche für Beispiel 2.39	84
4.12	Rand-B-Spline, bivariat	85
4.13	Kondensierungsstufen	85
4.14	Nichtkonvexer Gebietsrand	87
4.15	Lokal uniform kondensierter B-Spline, bivariat	88
4.16	Beispiel 2.30, uniform kondensiert	99
4.17	Graph Gebiete	104
4.18	Beispiel, Kein Graphgebiet	105
4.19	α -proper, Ecke von Rechteck	111
4.20	α -proper, Kante von Rechteck	111
4.21	Beispiel 2.29, uniform kondensiert	118
4.22	Beispiel in \mathbb{R}^3	120
4.23	Kondensierter Träger in \mathbb{R}^3	121

4.24	Variante des uniformen Kondensierens	122
4.25	Beispiel 4.52	122
4.26	Beispiel 4.52, kondensiert	123
5.1	Einheitskreis	126
5.2	Konditionszahlen über dem Kreis	127
5.3	Kritische Träger	128
5.4	Approximation über nicht-Lip 1-Gebiet	129
5.5	Approximation mit höheren Ordnung	130
5.6	Gebiet mit Verfeinerung	131
5.7	Abhängigkeit der Konstanten	132

1 Einleitung

Im Fokus dieser Arbeit steht die auf Tensorprodukt-B-Splines aufbauende Splineapproximation über Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Diese Methode liefert bezogen auf den gesamten \mathbb{R}^d beziehungsweise auf Quader im \mathbb{R}^d sehr gute Ergebnisse. Allerdings bringt die Einschränkung auf krummlinig berandete Gebiete noch einige Probleme mit sich. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, diese zu beheben, wobei insbesondere der bivariate Fall betrachtet wird.

Bevor auf die Problematiken der multivariaten Splineapproximation auf Gebieten näher eingegangen wird, soll zuerst eine kurze Einführung gegeben werden, weshalb das Thema der Approximation überhaupt von Interesse ist und wieso gerade Splinefunktion verwendet werden.

1.1 Approximation

Das Ziel der Approximation von Funktionen ist, zu einer Funktion f einen Approximanten g zu konstruieren, welcher eine möglichst gute Näherung darstellt. Es gibt verschiedene Bereiche, in welchen solche Approximationen ausgenutzt werden. Sind zum Beispiel Messdaten gegeben, so kann eine Approximation verwendet werden, um sie mit einer Funktion anzunähern. Bei empirischen Daten liegen häufig Messungenauigkeiten vor. Daher ist oft nicht die exakte Interpolation der Daten gewünscht, sondern eine Approximation, die einen gewissen Fehler minimiert. Auch der Fall, dass eine komplizierte Funktion durch eine einfachere angenähert werden soll, ist nicht selten. Partielle Differentialgleichungen sind zum Beispiel ein typisches Anwendungsfeld. Hierfür sind häufig aus analytischer Sicht nur Existenz- oder Eindeutigkeitsaussagen, allerdings keine explizit darstellbaren Lösungen, möglich. Über eine numerische Approximation können aber Näherungen der Lösung erzeugt werden.

Es wird nun zuerst der univariate Fall betrachtet. Dazu sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion über einem beliebigen Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zu dieser soll ein Approximant bestimmt werden. Dies ist mit Hilfe geeigneter Basisfunktionen φ_k möglich, indem durch $g = \sum_k a_k \varphi_k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ eine Funktion über $[a, b]$ gebildet wird. Die Bestimmung des geeigneten Approximanten entspricht

dann der Bestimmung der optimalen Koeffizienten.

Es gibt eine Vielzahl an Funktionenräumen, welche Approximanten mit guten Approximationseigenschaften beinhalten. Eine mögliche Wahl sind Funktionenräume mit trigonometrischen Basisfunktionen $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_{2n-1}(t) = \cos(nt)$, $\varphi_{2n}(t) = \sin(nt)$ für $n \in \mathbb{N}$. Eine periodische Funktion kann dann beispielsweise durch ihre Fourierreihe approximiert werden. Die Verwendung radialer Basisfunktionen ist eine weitere Möglichkeit (siehe zum Beispiel [57]).

Polynome sind besonders gute Kandidaten für Approximationen. Sie sind einfach berechenbar und ihre Implementierung ist auf einfache Weise möglich, ob es um die Abspeicherung, Veränderung oder Auswertung geht. Außerdem existiert nach dem fundamentalen *Satz von Weierstraß* für jede stetige Funktion ein Polynom, das diese beliebig gut approximiert. Es kann allerdings sein, dass die Ordnung des Polynoms dafür sehr groß sein muss und somit eine starke Oszillation vorliegt. Der große Nachteil der Polynome ist ihr globaler Charakter, denn lokale Änderungen haben somit immer auch global eine Auswirkung.

Um die positiven Eigenschaften der Polynome mit niedriger Ordnung auszunutzen, kann das betrachtete Intervall in Teilintervalle aufgeteilt und stückweise durch Polynome approximiert werden. Allerdings ist dies für das Erzeugen einer glatten Funktion nicht ausreichend. Dazu müssen zusätzlich gewisse Stetigkeitsbedingungen an den Approximanten gestellt werden. Diese Konstruktion wurde in einigen Arbeiten wie zum Beispiel von Runge [46] verwendet. Der heute verwendete Begriff der Splinefunktion wurde von Schoenberg [48] geprägt.

1.2 Univariate Splineapproximation

Eine segmentierte Funktion s mit Polynomsegmenten der Ordnung n heißt *Splinefunktion*, falls s $(n - 2)$ -mal stetig differenzierbar ist [37]. Prinzipiell ist es nicht ausgeschlossen die Funktion so zu konstruieren, dass die Segmente nicht unbedingt polynomiell sein müssen. Hoschek und Lasser [37] betrachten zum Beispiel sogenannte Exponentialsplines. Diese haben allerdings das Problem, dass sie rechnerisch sehr aufwendig sind. Hier soll jedoch aus den Vorteilen der Polynome niedriger Ordnung Nutzen gezogen werden und daher werden die polynomialen Splinefunktionen näher untersucht. Sie werden im Folgenden als *Splines* bezeichnet. Es gibt viele verschiedene Basen zu den Splines, von denen einige zum Beispiel in [50] dargestellt werden. Für die univariate Splineapproximation haben sich die B-Splines als besonders gut geeignete Basisfunktionen herauskristallisiert. Hierzu gibt es zahlreiche Literatur. Der Name B-Spline wurde von Schoenberg [49] gewählt, die Funktionen waren schon vorher bekannt. Die *B-Splines der Ordnung n* bilden eine Basis der Splines. Die B-Splines zeichnen sich durch einen kompakten Träger aus, der sich jeweils über n Segmente

des Splines erstreckt. Das hat zur Folge, dass der bei vielen andere Basen auftretende globale Charakter nicht vorliegt. Dies ist unter anderem praktisch für die Auswertung eines Splines, denn an jedem Punkt spielen nur n B-Splines eine Rolle. Sehr interessant für die Implementierung ist, dass die B-Splines auf einfache Weise über eine Rekursionsformel bestimmt werden können (siehe [5] oder [20]).

Im univariaten Fall bilden die B-Splines eine stabile Basis für die Approximation und es existieren einfache und gute Quasiinterpolanten. Ein Quasiinterpolant der Ordnung n ist hier ein linearer Operator, welches stetige Funktionen so auf Splines abbildet, dass Polynome der Ordnung n reproduziert werden. Durch diese Konstruktion entstehen sehr gute Approximanten, durch die eine optimale Approximationsordnung $O(h^n)$ erzielt werden kann. Mit h wird hier der maximale Knotenabstand bezeichnet. Diese Eigenschaften können in den meisten Büchern über Splines nachgelesen werden, wie zum Beispiel in dem Buch von de Boor [8]. Es gibt zahlreiche Arbeiten, in welchen die Möglichkeit der Splineapproximation bezüglich der Basis aus B-Splines erörtert werden. Hierbei wird beispielsweise versucht, präzise Aussage über die Approximationsordnung und ihre Konstanten zu erhalten (siehe [47] und [24]) oder beliebige Knotenfolgen [25] zu verwenden.

Hoschek und Lasser [37] heben zusätzlich die Eigenschaften der entstehenden Splinekurve hervor. Die Darstellung über B-Splines erlaubt im Gegensatz zum Beispiel zu der Darstellung über Monome eine geometrische Deutung der Koeffizienten. Die B-Splines sind positiv und bilden eine Partition der Eins. Dies führt unter anderem dazu, dass die Kurve in der konvexen Hülle der Koeffizienten liegt. De Boor [7] hat eine sehr ausführliche Arbeit verfasst, in welcher die Definitionen, Darstellungsweisen und die Eigenschaften der B-Splines unter Einbezug des zeitlichen Kontexts dargestellt werden.

1.3 Multivariate Splineapproximation auf Gebieten

Viele der positiven Eigenschaften der univariaten B-Splines übertragen sich durch die Verwendung von Tensorprodukt-B-Splines in den multivariaten Fall (siehe zum Beispiel [32] oder [50]). Wird hier die Approximation über dem gesamten \mathbb{R}^d , $d > 1$, betrachtet, so ist für beliebige Gitter eine stabile Splineapproximation mit maximaler Approximationsordnung möglich (siehe unter anderem [44]). Auch auf rechteckigen Gebieten $Q \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, sind entsprechende Resultate gültig ([41], [50]). Allerdings scheitert der Versuch, die Konzepte aus dem eindimensionalen Fall in höhere Dimensionen zu übertragen, wenn beliebige Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ betrachtet werden.

Das Tensorprodukt-Gitter kann nur in sehr eingeschränktem Maße auf das Gebiet angepasst werden. Nun existieren viele andere Möglichkeiten, ein Gebiet zu zerlegen und neue Basiselemente zu bilden. Eine Variante ist die Methode der T-Splines (siehe [51]); sie ist in einem gewissen Sinne eine Verallgemeinerung der Tensorprodukt-B-Splines. Auf bestimmten regulären Triangulierungen des Gebietes können zum Beispiel Box-Splines als Basiselemente verwendet werden (siehe [19] oder [10]). Auch Zerlegungen des Gebietes in nicht reguläre Dreiecke beziehungsweise Simplexes sind möglich. Hier gibt es ein breites Spektrum an Zerlegungen und eine Vielzahl an Arbeiten darüber.

Triangulierungen werden häufig verwendet, wenn es um gestreute Daten geht, wie zum Beispiel in der Geologie oder Meteorologie. Allerdings ist diese Methode immer mit dem Problem verbunden, dass eine geforderte Stetigkeit eine entsprechend höhere Ordnung erfordert. Im bivariaten Fall ist für eine gewünschte Glattheit r der Splinefunktion eine Ordnung $n \geq 3r + 2$ notwendig, um einen optimalen Approximanten zu erhalten (siehe [40]). Auch die Konstruktion der Triangulierungen und damit auch geeigneter Approximanten und Quasiinterpolanten ist im Allgemeinen schwierig.

Tensorprodukt-Gitter scheinen auf den ersten Blick nicht geeignet zu sein, dennoch überzeugt die Einfachheit der Konstruktion. Da die Tensorprodukt-B-Splines über dem Gitter durch die Multiplikation der univariaten Anteile gebildet werden, lassen sich die meisten Eigenschaften aus dem Univariaten übertragen. Außerdem sind die Tensorprodukt-Splineräume, welche durch Verfeinerungen des Gitters entstehen, ineinander geschachtelt. Dies ermöglicht zum Beispiel eine einfache Anwendung von Multigrid-Verfahren. Das Konzept der Tensorprodukt-Splineapproximation und vor allem die bei der Approximation über beliebigen Gebieten auftretenden Probleme werden daher in dieser Arbeit näher untersucht.

1.3.1 Tensorprodukt-Splineapproximation

Für die Approximation über $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ werden nur diejenigen Basiselemente des Tensorprodukt-Splineräume über \mathbb{R}^d verwendet, deren Träger das Gebiet Ω schneidet. Hierbei treten zwei Probleme auf: Zum einen können ungünstige Schnitte der einzelnen Träger mit dem Gebiet zu einer instabilen Basis führen. Zum anderen kann bei nicht-konvexen Gebieten eine optimale Approximationsordnung nicht gewährleistet werden. Dies liegt im Grunde daran, dass der Splineräum zu klein ist. Schneidet ein B-Splines das Gebiet in zwei nicht zusammenhängenden Bereichen, so können daraus je nach betrachteter Funktion große Fehler resultieren. Ein weiterer störender Effekt der Splineapproximation auf krummlinig berandeten Gebieten ist, dass die Konstanten in den verschiedenen bekannten Fehlerabschätzungen eine Abhängigkeit von dem Tensorprodukt-

Gitter aufweisen. Angenommen das Gitter $T := T_1 \otimes \dots \otimes T_d$ setzt sich aus uniformen Knotenfolgen T_i , $i = 1, \dots, d$, mit Gitterweiten h_i zusammen, dann bezieht sich die angesprochene Abhängigkeit der Konstanten von dem Gitter auf das Maximum des Quotienten h_i/h_j , $i \neq j$, der Gitterweiten. Die Gitterweiten dürfen sich dadurch nur in einem eingeschränkten Maße unterscheiden. Das Einschränken des Tensorprodukt-Splineräume in der beschriebenen Weise scheint also nicht die optimale Lösung zu sein. In dieser Arbeit werden die aufgeführten Probleme ausführlich betrachtet und Lösungswege aufgezeigt.

Es gibt Varianten der Tensorprodukt-B-Splines, welche das Problem der Instabilität lösen. Hier seien zum einen die erweiterten B-Splines (siehe zum Beispiel [33], [35], [36]) und zum anderen die normierten B-Splines ([42], [43]) erwähnt. Allerdings lösen sie nicht die Probleme, die bezüglich der Qualität der Approximation bestehen. In dieser Arbeit steht im Speziellen die Approximation über anisotropen Sobolevräumen $W_p^{\mathbf{n}}$ ([21] oder [4]) beziehungsweise Tensor-Sobolevräume [50] im Mittelpunkt. Dahmen, DeVore und Scherer [21] haben unter anderem genauer untersucht, für welche Gebiete mittels der klassischen Tensorprodukt-B-Splines eine optimale Approximation erreicht werden kann. Sie betrachten den Spliner Raum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}$ der Tensorprodukt-Splines von koordinatenweisen Grad $< \mathbf{n}$ für $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Von besonderem Interesse ist die Abschätzung des Fehlers der Approximation in folgender Form: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$, dann gilt

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}} \|f - s\|_{p,\Omega} \leq c \cdot (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega}).$$

Hierbei bezeichnet h_i , $i = 1, 2$, den maximalen Knotenabstand in jeder Koordinatenrichtung. Die Konstante c ist abhängig von \mathbf{n} , p und dem Gebiet Ω . Aber auch die unerwünschte Abhängigkeit von dem zugrundeliegenden Gitter tritt wieder auf.

Diese Form der Fehlerabschätzung ist vor allem aufgrund der Kombination der Gitterweite in einer Koordinatenrichtung mit der höchsten reinen partiellen Ableitung in der selben Richtung sehr interessant. Daher wird hier auf verschiedenen Wegen versucht, eine solche Abschätzung mit einer von dem Gitter unabhängigen Konstanten zu erhalten. Zuerst wird die Stabilität außer Acht gelassen und nur die Fehlerabschätzung untersucht. Hierbei wird ausgenutzt, dass die unerwünschte Abhängigkeit der Konstanten nicht auf allen Gebieten besteht. Schließlich werden alle Problempunkte der Splineapproximation auf krummlinig berandeten Gebieten in den Fokus gesetzt und eine Basis konstruiert, welche diese für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vollständig löst.

1.4 Inhaltsübersicht

In Kapitel 2 werden die zugrundeliegenden Funktionenräume und Objekte definiert und näher betrachtet. Es werden verschiedene Varianten des Bramble-Hilbert Lemmas dargestellt, welche für die Abschätzung des Fehlers der Approximation unerlässlich sind. Die Ergebnisse von Dahmen, DeVore und Scherer werden zusammengefasst und die Methoden des Erweiterns und Normierens vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei darauf, genau aufzuzeigen, wo die Probleme der Approximation über beschränkten Gebieten liegen.

Die Approximation auf dem gesamten \mathbb{R}^d sowie auf rechteckigen Gebieten ist unabhängig von dem Gitter. Für jedes beliebige beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ existiert ein rechteckiges Gebiet $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, welches Ω enthält. Auf dieser Idee basiert Kapitel 3. Es wird untersucht, welche Fortsetzungsmöglichkeiten von Funktionen aus anisotropen Sobolevräumen über einem beschränkten Gebiet bestehen und inwiefern dies für die Abschätzung des Approximationsfehlers über dem Gebiet ausgenutzt werden kann.

Kapitel 4 stellt die Konstruktion der sogenannten (lokal) uniform kondensierten B-Splines für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d = 1, 2$ vor. Es wird gezeigt, dass diese für Lipschitzgraph Gebiete eine stabile Basis bilden und der zugehörige Spliner Raum maximale Approximationskraft unabhängig von dem zugrundeliegenden Gitter besitzt. Damit bildet das uniforme Kondensieren die erste Methode auf Grundlage von Tensorprodukt-B-Splines, die diese Unabhängigkeit aufweist. Auch die gewünschte Fehlerabschätzung von Funktionen aus anisotropen Sobolevräumen wird in dieser Arbeit zum ersten Mal bezüglich der Splineapproximation für beschränkte Lipschitzgraph Gebiete bewiesen.

Am Ende dieses Kapitels werden mögliche Verallgemeinerungen der Voraussetzungen benannt und kurz untersucht, ob das Verfahren auch auf höhere Dimensionen übertragbar ist.

Kapitel 5 zeigt schließlich anhand von Beispielen, dass die konstruierte Basis die benannten Probleme löst. Die vorgestellten Methoden werden verglichen.

2 Bestehende Theorie

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Splineapproximation auf beschränkten Gebieten. Die bisher bestehende Theorie birgt einige Probleme in sich, die sie vor allem für praktische Zwecke ungünstig macht. Ziel dieses Kapitels ist es, die notwendigen Grundlagen für diese Arbeit zusammenzufassen und einen Überblick über mögliche Probleme zu geben.

Im Zusammenhang mit der Splineapproximation sind lokale Approximationen mit Polynomen wichtig. Im ersten Abschnitt werden daher einige Polynommen-gen und Funktionenräume, welche durch diese approximiert werden können, definiert. Ferner werden relevante Gebietsmengen aufgezeigt. Die entscheidenden Aussagen über die Approximation mit Polynomen liefern das Bramble-Hilbert Lemma und seine Variationen. Ein Überblick über die Variationen des Bramble-Hilbert Lemmas wird in Abschnitt 2.2 gegeben. Die Grundlagen und Probleme der klassischen Splineapproximation bezüglich einer Basis aus B-Splines werden schließlich in Abschnitt 2.3 herausgearbeitet. In den Abschnitten 2.4 und 2.5 werden zwei Varianten der Tensorprodukt-B-Splines beschrieben, welche einige der Probleme beheben.

2.1 Sobolevräume und Gebiete

Die meisten bekannten Approximationsresultate für Tensorprodukt-Splines basieren auf der Betrachtung der klassischen Sobolevräume (wie zum Beispiel in [9], [32] oder [36]). In dieser Arbeit soll der Schwerpunkt allerdings auf anisotrope Sobolevräume (Definition 2.3) gelegt werden. Diese werden über einen allgemeineren Zugang über sogenannte Λ -Polynome eingeführt.

Definition 2.1. Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{N}^d$ beschränkt und erfülle die Bedingung: Falls $\alpha \in \Lambda$ und $\beta \leq \alpha$, dann $\beta \in \Lambda$. Die Menge der Λ -Polynome ist für $m_\alpha : x \mapsto x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^d$, definiert als

$$\mathbb{P}_\Lambda := \text{span}\{m_\alpha : \alpha \in \Lambda\}.$$

Weiter sei die Menge der minimalen Elemente aus $\mathbb{N}^d \setminus \Lambda$ durch

$$\partial\Lambda := \{\alpha : \alpha \notin \Lambda \text{ und falls } \beta < \alpha, \text{ dann } \beta \in \Lambda\}$$

bezeichnet. Hierbei bedeutet $\beta < \alpha$, dass $\beta_i < \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, d$.

Für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ werden die Notationen $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d}$ und $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ verwendet.

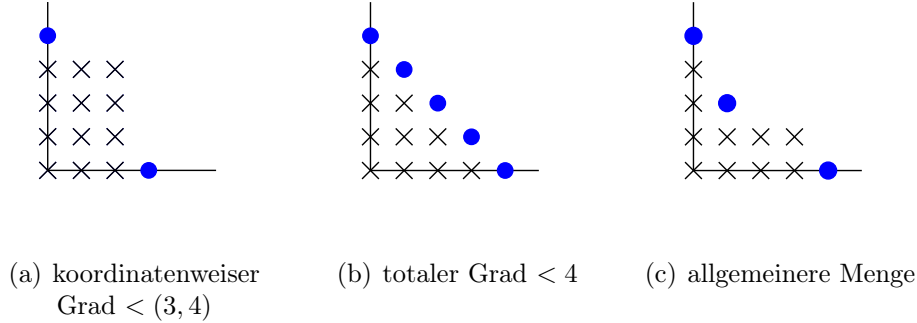


Abbildung 2.1: Beispiele für die Menge $\Lambda \subset \mathbb{N}^2$

Die Menge der Λ -Polynome ist so gewählt, dass sowohl Polynome vom totalen Grad $|\alpha| < n$ als auch solche vom koordinatenweisen Grad $\alpha_i < n_i$, $i = 1, \dots, d$, enthalten sind. Beispiele der Mengen Λ in \mathbb{N}^2 sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Auf der horizontalen Achse sind die Grade α_1 der x_1 -Koordinate und auf der vertikalen die Grade α_2 der x_2 -Koordinate aufgetragen. Die Menge Λ ist jeweils durch die Kreuze und $\partial\Lambda$ durch die blauen Kreise gekennzeichnet. Für die Menge der Polynome vom totalen Grad $< n$ über \mathbb{R}^d gilt:

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| < n\} \text{ und } \partial\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| = n\}.$$

Dies ist für $n = 4$ in Abbildung 2.1(b) zu sehen. Im Bezug auf die Splineapproximation auf Tensorprodukt-Gittern (siehe Abschnitt 2.3.2) ist vor allem der Fall der Polynome von koordinatenweisen Grad $< \mathbf{n}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, interessant. Dieser Fall ist für $\mathbf{n} = (3, 4)$ in Abbildung 2.1(a) veranschaulicht. Für $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ ist die Menge der *Polynome vom koordinatenweisen Grad $< \mathbf{n}$* beziehungsweise *von koordinatenweiser Ordnung \mathbf{n}* definiert als

$$\mathbb{P}_{\mathbf{n}} := \text{span}\{m_\alpha : \alpha_i < n_i, 1 \leq i \leq d\}.$$

Das heißt, $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}^d : \alpha < \mathbf{n}\}$ und $\partial\Lambda = \{n_i e_i \in \mathbb{N}^d : 1 \leq i \leq d\}$, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet.

Abbildung 2.1(c) zeigt ein weiteres Beispiel für Mengen Λ und $\partial\Lambda$. Diese repräsentieren weder ein Polynom von totalem noch von koordinatenweisen Grad. Die Menge der Λ -Polynome umfasst also nicht nur diese beiden Mengen. Die Funktionen, welche durch Λ -Polynome approximiert werden können, sind aus den folgenden speziellen Sobolevräumen.

Definition 2.2. Sei Ω eine beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^d . Sei $W_p^\Lambda(\Omega)$ definiert durch

$$W_p^\Lambda(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) : D^\alpha f \in L_p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \partial\Lambda, \|f\|_{W_p^\Lambda(\Omega)} < \infty\}.$$

Hierbei ist

$$\|f\|_{W_p^\Lambda(\Omega)} := \|f\|_{p,\Omega} + \sum_{\alpha \in \partial\Lambda} \|D^\alpha f\|_{p,\Omega}$$

und mit $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ wird die L_p -Norm über Ω bezeichnet.

Eine wichtige Rolle spielen hier die normierten und seminormierten Sobolevräume für $\Lambda = \{\alpha : \alpha < \mathbf{n}\}$. Diese sind wie folgt definiert.

Definition 2.3. Gegeben seien eine beschränkte offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und ein Vektor $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Sei $1 \leq p \leq \infty$.

1. Mit $w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ wird der Raum der Funktionen bezeichnet, für die folgende Seminorm endlich ist:

$$|f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} := \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} f\|_{p,\Omega}.$$

2. Sei $W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ der Raum der Funktionen $f \in L_p(\Omega)$, welche auf Ω schwache Ableitungen $\partial_i^{n_i} f$ für alle n_i mit $i = 1, \dots, d$ besitzen und für die gilt:

$$\|f\|_{W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} := \|f\|_{p,\Omega} + |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} < \infty.$$

Dieser Raum wird anisotroper Sobolevraum [4] beziehungsweise Tensor-Sobolevraum [50] genannt.

Falls $\mathbf{n} := (n, \dots, n)$, so wird in dieser Arbeit von dem *isotropen Fall* gesprochen. Ist allerdings $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d)$, wird davon ausgegangen, dass die $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$, unterschiedliche Werte besitzen können. Dies wird hier als der *anisotrope Fall* bezeichnet. Die seminormierten Räume werden häufig auch als $L_p^{\mathbf{n}}$ -Räume bezeichnet, wie zum Beispiel von Faïn [30] oder Besov [2].

Die Sobolevräume zu den Polynomen von totalem Grad werden hier mit $W_p^{|\alpha| < n}$ benannt. Die zugehörige Seminorm ist gegeben durch

$$|f|_{w_p^{|\alpha| < n}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=n} \|D^\alpha f\|_{p,\Omega}.$$

Die klassischen Sobolevräume mit Norm

$$\|f\|_{H_p^n(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha f\|_{p,\Omega}$$

werden in dieser Arbeit mit H_p^n gekennzeichnet. Die Seminorm entspricht der Seminorm $|\cdot|_{w_p^{|\alpha|<n}(\Omega)}$.

Bemerkung 2.4. Über beschränkten Lipschitzgraph Gebieten (siehe [53]) gilt, dass Funktionen aus den anisotropen Sobolevräumen W_p^n auch in den Sobolevräumen $H_p^{n_{\min}}$ für $n_{\min} := \min\{n_i : 1 \leq i \leq d\}$ enthalten sind ([21, Lemma 2.3]). Hierbei wird ausgenutzt, dass nach [52] oder [53]

$$\|f\|_{H_p^n(\Omega)} \leq c \left(\sum_{i=1}^d \|\partial_i^n f\|_{p,\Omega} + \|f\|_{p,\Omega} \right)$$

gilt.

Burenkov [15, S.89] zeigt, dass für den isotropen Fall $\mathbf{n} := (n, \dots, n)$ sogar folgende Zusammenhänge gültig sind:

1. $w_p^n(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.
2. $w_p^n(\Omega) = W_p^n(\Omega)$.
3. $w_p^n(\Omega) = w_p^{|\alpha|<n}(\Omega)$.

Anisotrope Sobolevräume W_p^n wurden unter anderem von Besov, Il'in und Nikol'skii [4] näher betrachtet. Sie untersuchen verschiedene Integralrepräsentationen für differenzierbare Funktionen und nutzen diese aus, um Einbettungssätze für anisotrope Sobolevräume zu beweisen. Dazu werden die Funktionen in Ausdrücken ihrer Ableitungen dargestellt.

Integralrepräsentation von $f \in W_p^n(\Omega)$

Die Integralrepräsentationen werden durch die Verwendung eines „Mittelungskerns“ (averaging kernel) K erzeugt, für den

$$\text{supp } K := S(K) \subset \{x \in \mathbb{R}^d : -a_i \leq x_i \leq a_i, i = 1, \dots, d\}$$

gilt. Aufbauend auf diesem Mittelungskern sind folgende Gebiete definiert.

Definition 2.5. *Eine Gebiet G , welches den Mittelungskern $S(K)$ enthält, wird \mathbf{n} -Stern-Gebiet bezüglich $S(K)$ genannt, falls für jeden Punkt $x \in G$ gilt, dass $V(\mathbf{n}, x) \subset G$. Hierbei ist $V(\mathbf{n}, x) := \bigcup_{0 \leq v \leq 1} S(K, 1/\mathbf{n}, v; x)$ mit*

$$\begin{aligned} S(K, \boldsymbol{\lambda}, v; x) &:= \{y : y \in x + (S(K) - x)v^{\boldsymbol{\lambda}}\} \\ &\subset \{y : x_i + (-a_i - x_i)v^{\lambda_i} \leq y_i \leq x_i + (a_i - x_i)v^{\lambda_i}, i = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Es wird nun eine Integralrepräsentation angegeben, auf welche in Kapitel 3 Bezug genommen wird. Die Integralrepräsentation von Funktionen f mit schwachen Ableitungen $\partial_i^{n_i} f$, $i = 1, \dots, d$, (siehe zum Beispiel [4, §7.5] oder [30, S.291, S.295]) kann dargestellt werden durch

$$f(x) = p_{\mathbf{n}-1}(f, x) + \sum_{i=1}^d \int_0^1 v^{-|\frac{1}{\mathbf{n}}|} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i^{n_i} f(y) \mathcal{L}_i \left(x, \frac{y-x}{v^{\frac{1}{\mathbf{n}}}} \right) dy dv \quad (2.1)$$

mit

$$p_{\mathbf{n}-1}(f, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) D_y^{\mathbf{n}} \left[\frac{(y-x)^{\mathbf{n}-1}}{(\mathbf{n}-1)!} \int_{\mathbb{R}^d} K(z) \theta(y-z) dz \right] dy$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(x, y) &= \frac{(-1)^{n_i}}{n_i} D_y^{\mathbf{n}-n_i e_i} \left[\frac{y^{\mathbf{n}-1} y_i}{(\mathbf{n}-1)!} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(x_1 + z_1, \dots, x_i + y_i, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, x_n + z_n) \cdot \left(\prod_{j \neq i} \theta(y_j - z_j) \right) d(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \right]. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\theta(x) = \prod_{j=1}^d \theta(x_j)$ die Heaviside-Funktion und $p_{\mathbf{n}-1}$ ist ein Polynom von koordinatenweisem Grad $< \mathbf{n}$. Die rechte Seite der Darstellung (2.1) ist für \mathbf{n} -Stern-Gebiete gültig.

\mathbf{n} -Horn Gebiete

Es werden nun einige Klassen von Gebieten Ω angegeben, die direkt auf der gegebenen Integralrepräsentation aufbauen. Über diesen Gebieten ist die von Besov, Il'in und Nikol'skiĭ [4] gegebene Repräsentation gültig. Sie wurden im anisotropen Fall von Besov und Il'in (zum Beispiel in [3]) und im isotropen Fall von Sobolev [54] und [55] vorgestellt. Die im Folgenden zugrunde gelegte Metrik sei definiert als

$$\varrho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^{n_i} \right)^{\frac{1}{A}} \quad (2.2)$$

mit $A = \max_{1 \leq i \leq d} n_i$.

Definition 2.6. Sei $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Angenommen, $0 < h \leq \infty$, $\varepsilon > 0$ und $a_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, d$, so wird die Menge

$$V(\mathbf{n}, h) = \bigcup_{0 < v < h} \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \frac{x_i}{a_i} > 0, v < \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{n_i} < (1 + \varepsilon)v \quad (i = 1, \dots, d) \right\}$$

als \mathbf{n} -Horn mit Radius h und Öffnung ε bezeichnet.

Für den Fall $n_1 = \dots = n_d$, ist ein solches \mathbf{n} -Horn $V(\mathbf{n}) = V(\mathbf{n}, h)$ ein Kegel.

Definition 2.7. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt eine schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung ($\Omega \in \underline{A}(\mathbf{n}, h)$), wenn offene Mengen Ω_k und \mathbf{n} -Hörner $V_k(\mathbf{n}) = V_k(\mathbf{n}, h)$ mit a_i abhängig von k für $k = 1, \dots, M$ und $M \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k = \bigcup_{k=1}^M (\Omega_k + V_k(\mathbf{n}, h)). \quad (2.3)$$

Definition 2.8. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt eine \mathbf{n} -Horn Bedingung ($\Omega \in A(\mathbf{n}, h)$), falls sie Bedingung (2.3) erfüllt und zusätzlich gilt

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k^{(\delta)}, \quad \text{für ein } \delta > 0.$$

Hierbei ist

$$\Omega_k^{(\delta)} := \{x : x \in \Omega_k, \varrho(x, \partial\Omega_k \setminus \partial\Omega) > \delta\}.$$

Definition 2.9. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt die starke \mathbf{n} -Horn Bedingung ($\Omega \in \overline{A}(\mathbf{n}, h)$), falls sie Bedingung (2.3) erfüllt und zusätzlich gilt

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k^{[\delta]}, \quad \text{für ein } \delta > 0,$$

wobei

$$\Omega_k^{[\delta]} := \{x : x \in \Omega_k, \varrho(x, \Omega \setminus \Omega_k) > \delta\}.$$

Für die verschiedenen \mathbf{n} -Horn Bedingungen gelten die Zusammenhänge:

$$\underline{A}(\mathbf{n}, h) \supset A(\mathbf{n}, h) \supset \overline{A}(\mathbf{n}, h)$$

und mit den Definitionen

$$\underline{A}(\mathbf{n}) = \bigcup_{0 < h < \infty} \underline{A}(\mathbf{n}, h), \quad A(\mathbf{n}) = \bigcup_{0 < h < \infty} A(\mathbf{n}, h), \quad \overline{A}(\mathbf{n}) = \bigcup_{0 < h < \infty} \overline{A}(\mathbf{n}, h)$$

gilt auch:

$$\underline{A}(\mathbf{n}) \supset A(\mathbf{n}) \supset \overline{A}(\mathbf{n}).$$

Bemerkung 2.10. Falls in den Definitionen 2.7-2.9 $n_1 = \dots = n_d$ ist, so werden die Bedingungen als (schwache/starke) Kegelbedingung bezeichnet.

Beispiel/Gegenbeispiel 2.11. Sei $d = 2$ und $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Es wird die Kreisscheibe $Q = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ betrachtet. Nach Besov, Il'in und Nikol'skii [4, S.155] gilt:

1. $Q \in \underline{A}(\mathbf{n})$, nur wenn $\frac{1}{2}n_1 \leq n_2 \leq 2n_1$.
2. $Q \in \overline{A}(\mathbf{n})$, nur wenn $n_1 = n_2$, das heißt nur im isotropen Fall. Dasselbe gilt für $A(\mathbf{n})$.

Ist die Differenz zwischen n_1 und n_2 zu groß, so ist es nicht möglich die Integralrepräsentation (2.1) für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(Q)$ zu bilden. ■

Wie auch in Beispiel 3.26 gezeigt wird, besteht ein starker Zusammenhang zwischen der Anisotropie des Sobolevraumes und der Glattheit des Randes $\partial\Omega$.

Beispiel 2.12. Der Kreisring

$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$$

genügt der schwachen Kegelbedingung, also der schwachen \mathbf{n} -Horn Bedingung mit $n_1 = n_2$. Wird schließlich der „geschnittene“ Kreisring

$$\mathcal{R}^- = \{(x_1, x_2) : 1 < x_1^2 + x_2^2 < 4, x_1 < 0 \text{ für } x_2 = 0\}$$

betrachtet, so erfüllt dieser die Kegelbedingung, jedoch keine starke Kegelbedingung. (siehe [4]) ■

2.2 Bramble-Hilbert Lemma

Das klassische Bramble-Hilbert Lemma ([11], [12]) liefert eine Fehlerabschätzung der Approximation durch ein Polynom der Ordnung \mathbf{n} auf zusammenhängenden

Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, welche eine starke Kegelbedingung erfüllen. Im Bezug auf die Splineapproximation und ihre Anwendung ist es wichtig zu wissen, inwiefern die Konstanten solcher Fehlerabschätzungen von dem Gebiet, der Ordnung \mathbf{n} des Spline- beziehungsweise Polynomraumes oder dem Exponenten p des Sobolevraumes abhängen. Die Beweismethode von Bramble und Hilbert liefert hier allerdings keine Anhaltspunkte. Auch die Forderung einer starken Kegelbedingung ist sehr einschränkend.

In der bestehenden Literatur gibt es viele Untersuchungen, die sich mit den Abhängigkeiten der Konstanten beschäftigen. So wird zum Beispiel gezeigt, dass für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, welches sternförmig bezüglich einer Kugel $B_r \subset \Omega$ mit Radius r ist, das Bramble-Hilbert Lemma mit Konstanten C abhängig von der Geometrie des Gebietes gültig ist. Genauer heißt das (siehe [23] oder [13]):

Sei $r_{\max} := \max\{r \in \mathbb{R} : \Omega \text{ ist sternförmig bezüglich } B_r\}$ und $\gamma := \frac{\text{diam } \Omega}{r_{\max}}$. Für Ω , welche sternförmig bezüglich B_r mit Radius r sind, und für $f \in H_p^n(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, existiert ein Polynom P vom totalen Grad $n - 1$:

$$|f - P|_{w_p^{|\alpha| < k}(\Omega)} \leq C(d, n, \gamma) (\text{diam } \Omega)^{n-k} |f|_{w_p^{|\alpha| < n}(\Omega)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Die Abhängigkeit von γ ist hier nicht erwünscht. Weitere Ergebnisse wurden von Dupont und Scott [26, 27] oder auch von Durán [28] bewiesen. Für konvexe Gebiete haben Dekel und Leviatan [23] für beliebige p und Verfürth [56] für $p = 2$ gezeigt, dass die Konstante lediglich von d und n abhängt. Hierbei gibt Verfürth sogar eine konkrete Schranke für $c(d, n)$ an. Eine allgemeinere Klasse an Gebieten und zwar Gebiete, welche bezüglich eines einzelnen Punktes sternförmig sind, wurde zum Beispiel von Verfürth [56] oder Dechevski und Quark [22] untersucht.

Dies alles sind Resultate für die klassischen Sobolevräume H_p^n . In Hinblick auf die anisotropen Sobolevräume W_p^n und die Splineapproximation durch Tensorprodukt-Splineräume sind besonders Abschätzungen der Form

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p, \Omega} \leq C \cdot \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} f\|_{p, \Omega} \quad (2.4)$$

interessant. Für sternförmige Gebiete haben Dupont und Scott [27] unter anderem die Approximation mit Polynomen aus Tensorprodukt-Räumen untersucht. Die Resultate, welche für diese Arbeit relevant sind, werden in den nun folgenden Abschnitten näher erläutert.

2.2.1 Lipschitzgraph Gebiete und Stetigkeitsmoduli

Die Resultate dieses Abschnittes werden in [21] für alle Λ -Polynome erzielt. Hier werden sie allerdings für den Spezialfall der Polynome von koordinatenweisen

Grad $< \mathbf{n}$ wiedergegeben.

Neben der Abschätzung der Form (2.4) steht in diesem Abschnitt auch die Abschätzung durch einen Stetigkeitsmodul im Zentrum. Für zweitens wird die Äquivalenz zwischen Stetigkeitsmodul und K-Funktional ausgenutzt.

Eines der Hauptresultate ist der folgende Satz [21, Theorem 2.1].

Satz 2.13. *Sei Ω ein Lipschitzgraph Gebiet und $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$, dann gilt*

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p,\Omega} \leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} f\|_{p,\Omega},$$

wobei C abhängig von p , \mathbf{n} und Ω ist.

Mit Hilfe dieses Resultats lässt sich eine Abschätzung für rechteckige Gebiete zeigen.

Korollar 2.14. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein Rechteck mit Seitenlängenvektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, dann gilt für alle $f \in W_p^{\mathbf{n}}(Q)$*

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p,Q} \leq C \sum_{i=1}^d \delta_i^{n_i} \|\partial_i^{n_i} f\|_{p,Q} \quad (2.5)$$

mit C unabhängig von f und Q .

[21, S. 384]

In Hinblick auf die Splineapproximation auf rechteckigen Gittern ist die Abschätzungsform (2.5) besonders interessant. Hier werden zum einen nur reine partielle Ableitungen benötigt, zum anderen besteht ein direkter Zusammenhang der reinen Ableitung bezüglich einer Koordinate mit der Seitenlänge des Rechtecks in dieser Koordinatenrichtung. Angenommen im Falle der Splineapproximation seien diese Rechtecke die Gitterzellen, so lässt sich der Fehler direkt über die Feinheit des Gitters steuern.

Eine weitere interessante Abschätzung ist durch folgenden Stetigkeitsmodul möglich.

Definition 2.15. *Für $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ und $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d$ sei $\Delta_{t_i,i}^{n_i}$ die n_i -te Vorwärtsdifferenz der Schrittweite t_i bezüglich x_i mit $i = 1, \dots, d$. Der multivariate Stetigkeitsmodul für $f \in L_p(\Omega)$ ist definiert als*

$$\omega_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{h}, \Omega)_p := \sum_{i=1}^d \sup_{0 < \mathbf{t} < \mathbf{h}} \|\Delta_{t_i,i}^{n_i}(f, \cdot)\|_{p,\Omega(n_i \mathbf{e}_i, \mathbf{h})},$$

wobei $\Omega(n_i \mathbf{e}_i, \mathbf{h}) := \{x \in \mathbb{R}^d : x + s_i n_i \mathbf{e}_i \in \Omega, \text{ für alle } \mathbf{s} \leq \mathbf{h}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^d\}$ für den i -ten Einheitsvektor \mathbf{e}_i .

Für die Abschätzungen durch den Stetigkeitsmodul $\omega_{\mathbf{n}}$ wird dessen Äquivalenz zu dem K-Funktional

$$K_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{h}, \Omega)_p := \inf_{g \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \left\{ \|f - g\|_{p, \Omega} + \sum_{i=1}^d h_i^{n_i} \|\partial_i^{n_i} g\|_{p, \Omega} \right\}, \text{ für gegebenes } f \in L_p(\Omega)$$

ausgenutzt. Für beliebige $f \in L_p(\Omega)$ gilt $\omega_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{t}, \Omega)_p \leq C \cdot K_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{t}, \Omega)_p$ mit $\mathbf{t} > 0$ (siehe [21, S.385]).

Die umgekehrte Richtung gilt nicht ohne Weiteres. Falls das Gebiet ein Rechteck $Q = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ mit Seitenlängenvektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $\delta_i = b_i - a_i > 0$, ist, so gilt [21, Lemma 3.1]:

Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für ein beliebiges Rechteck Q und für alle $f \in L_p(Q)$ und $\mathbf{t} > 0$ folgt

$$K_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{t}, Q)_p \leq C \omega_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{t}, Q)_p.$$

Dies kann ausgenutzt werden, um Gebiete zu konstruieren, für die der Stetigkeitsmodul und das K-Funktional äquivalent sind. Grundlegend ist hierbei die Eigenschaft koordinatenweise konvex zu sein.

Definition 2.16. Ω ist koordinatenweise konvex, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\text{gilt } x, x + h e_i \in \Omega \text{ für ein } h > 0 \text{ und } i \Rightarrow x + t e_i \in \Omega \text{ für alle } 0 \leq t \leq h. \quad (2.6)$$

Hierauf aufbauend wird über eine spezielle „Kegelbedingung“ mit Hilfe von Rechtecken eine Klasse von Gebieten definiert, welche die gewünschte Äquivalenz erlaubt.

Definition 2.17. Ω erfüllt eine gleichmäßige Rechteckeigenschaft, falls gilt:

$$\begin{aligned} &\Omega \text{ erfüllt (2.6) und } \Omega \subseteq \cup_{i=1}^m Q_i, \text{ wobei die } Q_i \text{ Rechtecke sind und} \\ &\text{für jedes } i \text{ ein Rechteck } R_i \text{ existiert, dessen eine Ecke im Ursprung liegt,} \\ &\text{so dass } x \in Q_i \cap \Omega \Rightarrow x + R_i \subset \Omega. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Wie gewünscht lässt sich für diese Gebiete die Äquivalenz von Stetigkeitsmodul und K-Funktional nachweisen.

Satz 2.18. Falls für Ω (2.7) erfüllt ist, dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, die nur von \mathbf{n} und Ω abhängen, so dass für jedes $\mathbf{h} > 0$

$$C_1 \omega_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{h}, \Omega)_p \leq K_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{h}, \Omega)_p \leq C_2 \omega_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{h}, \Omega)_p.$$

Mit Hilfe dieser Äquivalenz und mit Satz 2.13 kann schließlich $\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p,\Omega}$ durch den Stetigkeitsmodul abgeschätzt werden.

Korollar 2.19. *Falls Ω Bedingung (2.7) erfüllt und $\Omega \subset Q$ ist, wobei Q ein Rechteck mit Seitenlängenvektor δ ist, dann gilt für jedes $f \in L_p(\Omega)$*

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p,\Omega} \leq C \omega_{\mathbf{n}}(f, \delta, \Omega)_p,$$

wobei C nur von \mathbf{n} , Ω und p abhängt.

Prinzipiell sind Abschätzungen dieser Form solchen aus Satz 2.13 vorzuziehen. Einerseits werden geringere Glattheitsanforderungen an die Funktionen gestellt und andererseits ist zweitens durch die erste bedingt, denn

$$\omega_{\mathbf{n}}(f, \delta, \Omega)_p \leq \sum_{i=1}^d \delta_i^{n_i} \|\partial_i^{n_i} f\|_{p,\Omega}.$$

Die Bedingung (2.7) ist allerdings enorm einschränkend. Weder ein einfacher Kreis noch ein beschränkter Kegel, welcher eine Ecke im Ursprung besitzt und nur einen Koordinatenvektor enthält, genügen dieser Anforderung. Dahmen, DeVore und Scherer [21] zeigen, dass es eine größere Klasse von Gebieten gibt, für die eine Abschätzung über den Stetigkeitsmodul möglich ist. Allerdings ist auf diesen die Äquivalenz zu dem K-Funktional nicht gegeben. Die Approximationen mit Polynomen werden benötigt, um die Fehlerabschätzung bei der Splineapproximation zu beweisen. Um auch dort eine Abschätzung über den Stetigkeitsmodul zu erhalten, wird die Äquivalenz zu dem K-Funktional ausgenutzt. Daher wird die erwähnte Klasse von Gebieten, für die eine Variante von Korollar 2.19 gültig ist, nicht näher erläutert.

2.2.2 Verallgemeinerte Graphgebiete

Die im Folgenden dargestellten Resultate wurden von Reif [45] bewiesen. Es wird eine Variante des Bramble-Hilbert Lemmas für Graphgebiete gegeben. Reif betrachtet in seiner Arbeit auch sogenannte „verallgemeinerte Graphgebiete“. Es wird gezeigt, dass über diesen eine optimale Approximation von Funktion $f \in W_p^1(\Omega)$ durch Polynome möglich ist. Für alle seine Resultate sind die Abhängigkeiten der Konstanten näher bestimmt und die Konstanten werden sogar genauer angegeben.

Hier werden nur die später benötigten Resultate für die Graphgebiete wiedergegeben. Außerdem wird auf die Angabe der exakten Konstanten verzichtet und es werden nur die Abhängigkeiten geklärt.

Definition 2.20. Ein Gebiet Φ in \mathbb{R}^d heißt φ -Gebiet, falls über $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^{d-1}$ eine stetige Funktion $\varphi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varphi(\mathbf{Y}) \subset [k, k(1+m)]$ für Konstanten $k, m > 0$ existiert, so dass

$$\Phi := \{(y, z) : y \in \mathbf{Y}, 0 \leq z \leq \varphi(y)\}.$$

Diese Menge besteht im Wesentlichen aus den Teilen

$$\Phi^- := \{(y, z) \in \Phi : z \leq k\} \quad \text{und} \quad \Phi^+ := \{(y, z) \in \Phi : z \geq k\}.$$

In der nun folgenden Definition wird die Isometrie $\mathcal{A}[r, \sigma, \tau](x) := (\sigma \cdot x + \tau)A_r$ mit $\sigma \in \{-1, 1\}$ verwendet. Diese Isometrie setzt sich aus einer Permutationsmatrix $A_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, welche die r -te und d -te Koordinate vertauscht, und einer Translation $\tau \in \mathbb{R}^d$ zusammen.

Definition 2.21. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ wird Graphgebiet genannt, falls eine Box beziehungsweise ein Rechteck $B \subset \mathbb{R}^d$ mit Seitenlängenvektor $h := |B| > 0$ und eine geschachtelte Folge von Teilmengen

$$B = \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_J = \Omega$$

mit der folgenden Eigenschaft existiert:

Für $j \in \{1, \dots, J\}$ existiert über $Y_j \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ein φ_j -Gebiet mit den Parametern k_j und m_j , eine Isometrie $\mathcal{A}_j := \mathcal{A}[r_j, \sigma_j, \tau_j]$ und ein Index $i_j < j$, so dass

$$\mathcal{A}_j(\Phi_j^-) \subset \Omega_{i_j} \quad \text{und} \quad \Omega_j = \Omega_{j-1} \cup \mathcal{A}_j(\Phi_j^+).$$

Hierbei wird B der Kern und $[\Omega] := [L, M, I, R]$ die Parametermenge von Ω mit $L = [l_1, \dots, l_J] := [k_1/h_{r_1}, \dots, k_J/h_{r_J}]$, $M = [m_1, \dots, m_J]$, $I = [i_1, \dots, i_J]$ und $R = [r_1, \dots, r_J]$ genannt.

Folgender Satz ist für Graphgebiete gültig.

Satz 2.22. Sei Ω ein Graphgebiet mit Parametern $[\Omega] = [L, M, I, R]$ und Kern B mit Seitenlängenvektor $h := |B|$. Für ein beliebiges $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ und $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ existiert $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$, so dass

$$\|f - q\|_{p, \Omega} \leq \sum_{i=1}^d c_i(\mathbf{n}, p, [\Omega]) \cdot h_i^{n_i} \|\partial_i^{n_i} f\|_{p, \Omega}.$$

Das Polynom $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ ist näher bestimmbar. Dieses ist allerdings hier nicht von Belang und es wird dafür auf [45, §2] verwiesen.

2.3 B-Splines

Bevor die Approximation mit Splines näher betrachtet wird, werden einige notwendige Begriffe gegeben. Hierbei wird zuerst der univariate Fall betrachtet und schließlich der multivariate Fall über eine Tensorproduktstruktur aus univariaten Anteilen gebildet.

Die Notationen und Definitionen beinhalten nicht alle Grundlagen der B-Spline Theorie und auch auf Beweise wird hier verzichtet. Ausführliche Informationen zu den B-Splines und auch den Tensorproduktflächen sind unter anderem in [37] oder [8] zu finden. In [50] werden neben den Tensorprodukt-Splines eine ganze Reihe weiterer Splineräume betrachtet.

2.3.1 Univariate Splines

Gegeben sei ein Knotenvektor $T := \{t_1, \dots, t_{m+n}\} \subset \mathbb{R}$ für $m > n$ mit uniformen Knotenabstand $h := |t_{j+1} - t_j|$ für $j = 1, \dots, m+n-1$. Es soll der Spliner Raum der Ordnung n betrachtet werden. Das kanonische Definitionsgebiet des Knotenvektors T ist $D(T) := [t_n, t_{m+1}]$. Falls Funktionen über dem gesamten \mathbb{R} betrachtet werden sollen, so ist der Knotenvektor ein bi-infiniter Knotenvektor $T = \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Definition 2.23. Eine Funktion $s : D(T) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s|_{(t_j, t_{j+1})} \in \mathbb{P}_n(t_j, t_{j+1})$ für $j = 1, \dots, m$, welche an jedem Knoten t_i mindestens $n-2$ mal stetig differenzierbar ist, wird als Spline der Ordnung n bezeichnet. Die Menge dieser Splines wird als Spliner Raum

$$\mathcal{S}_n(T) := \{s : D(T) \rightarrow \mathbb{R} : s|_{(t_j, t_{j+1})} \in \mathbb{P}_n(t_j, t_{j+1}) \text{ für } j = 1, \dots, m \text{ und } s^{(\alpha)} \in C(D(T)) \text{ für alle } \alpha \leq n-2\}$$

bezeichnet. Falls ein Gebiet $\Omega \subset D(T)$ betrachtet wird, so wird der Spliner Raum $\mathcal{S}_n(T)$ auf dieses eingeschränkt, das heißt,

$$\mathcal{S}_n(T, \Omega) := \{s|_{\Omega} : D(T) \rightarrow \mathbb{R} : s|_{(t_j, t_{j+1})} \in \mathbb{P}_n(t_j, t_{j+1}) \text{ für } j = 1, \dots, m \text{ und } s^{(\alpha)} \in C(D(T)) \text{ für alle } \alpha \leq n-2\}.$$

Die Basiselemente von $\mathcal{S}_n(T)$ sind hier die B-Splines $\{b_i\}_{i=1}^m$, welche zum Beispiel über eine Rekursionsformel definiert sind (siehe unter anderem [37]). Die einzelnen B-Splines haben einen kompakten Träger $\text{supp } b_i := [t_i, t_{i+n}]$ und bilden über einer einheitlichen uniformen Knotenfolge T an jedem Punkt in $D(T)$ eine Partition der Eins. Splines aus $\mathcal{S}_n(T)$ beziehungsweise $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ können

bezüglich der B-Spline-Basis durch Koeffizienten $\{f_i\}_{i=1}^m$ mit $f_i \in \mathbb{R}$ wie folgt bestimmt werden:

$$s(x) = \sum_{i=1}^m f_i b_i(x).$$

Für die Anwendung der Splineapproximation ist es wichtig zu wissen, wie sich zum Beispiel Änderungen der Koeffizienten auf Splines aus dem Splineraum $\mathcal{S}_n(T)$ auswirken. Das heißt, ob es Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$c\|F\|_\infty \leq \|s\|_\infty \leq C\|F\|_\infty, \quad (2.8)$$

wobei hier $F := (f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^m$ ist. Die Koeffizienten werden in der l_∞ -Norm und die Splines in der L_∞ -Norm betrachtet. Der Quotient $\frac{C}{c}$ wird als *Kondition der B-Spline-Basis* $\text{cond}_\infty(\{b_i\}_{i=1}^m)$ bezeichnet. Ist diese Konditionszahl bezüglich des Knotenabstandes gleichmäßig beschränkt, so wird die B-Spline-Basis stabil genannt.

Satz 2.24. *Gegeben sei die B-Spline-Basis $\{b_i\}_{i=1}^m$ zu dem Splineraum $\mathcal{S}_n(T)$. Für beliebiges $\xi \in [t_i, t_{i+n}]$ wird mit*

$$\lambda_i(f) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha < n} (-1)^{(n-1-\alpha)} \psi_i^{(n-1-\alpha)}(\xi) f^{(\alpha)}(\xi)$$

das zu den B-Splines b_i duale de Boor-Fix Funktional definiert. Hierbei sind die $\psi_i \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, definiert durch

$$\psi_i(x) := \prod_{j=1}^{n-1} (t_{i+j} - x),$$

[8].

Die *Dualität* des de Boor-Fix Funktionals zu den B-Splines bedeutet hier, dass $\lambda_i(b_j) = \delta_{ij}$ erfüllt ist. Die Ableitungen der Polynome ψ_i lassen sich über eine Produktdarstellung ausdrücken.

Lemma 2.25. *Für jedes $k = 0, \dots, n-1$ gibt es Nullstellen $\tau_{i,j}^k \in \mathbb{R}$, $j = k+1, \dots, n-1$ mit $\tau_{i,j-k}^0 \leq \tau_{i,j}^k \leq \tau_{i,j}^0$ so, dass*

$$\psi_i^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \prod_{j=k+1}^{n-1} (\tau_{i,j}^k - x)$$

gilt [42].

Für die Kondition beziehungsweise Stabilität der B-Spline-Basis über \mathbb{R} lässt sich folgender Satz beweisen.

Satz 2.26. *Sei $\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ eine beliebige B-Spline-Basis der Ordnung n auf dem gesamten \mathbb{R} . Dann ist die Kondition der B-Spline-Basis gleichmäßig durch eine Konstante $M(n)$ beschränkt, welche nur von n abhängig ist. Das heißt,*

$$\text{cond}_\infty(\{b_i\}_{i \in \mathbb{Z}}) \leq M(n).$$

Dieses Resultat wird unter anderem in [42] oder [6] bewiesen. Der Beweis soll hier nicht dargestellt werden. Mößner hebt in seiner Arbeit zwei entscheidende Eigenschaften hervor, welche für den Beweis notwendig sind (siehe [42, S.98 ff]). Zum einen müssen die Ableitungen $\psi_i^{(\alpha)}(\xi)$ gleichmäßig beschränkt sein, zum anderen muss die Norm $\|s\|_\xi := \sum_{\alpha=0}^{n-1} |s^{(\alpha)}(\xi)|$ gegen die L_∞ -Norm abgeschätzt werden können. Beides ist erfüllt, wenn der Splineraum über $D(T)$ oder dem gesamten \mathbb{R} betrachtet wird. Falls allerdings $\Omega \subset D(T)$ und somit $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ gewählt wird, treten mit dieser herkömmlichen B-Spline-Basis Probleme auf. Diese können im Eindimensionalen meist durch eine geeignete Wahl der Knoten umgangen werden. Im mehrdimensionalen Fall ist das nicht möglich. Daher wird hier nur diese kurze Anmerkung gemacht und die Probleme werden im folgenden Abschnitt näher erläutert. Der Raum, welcher eigentlich als Grundlage für die Splinesapproximation gewünscht ist, ist

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_n(T, \Omega) := \{s : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : s|_{(t_j, t_{j+1}) \cap \Omega} \in \mathbb{P}_n((t_j, t_{j+1}) \cap \Omega) \text{ für } j = 1, \dots, m \\ \text{und } s^{(\alpha)} \in C(\Omega) \text{ für alle } \alpha \leq n - 2\}. \end{aligned}$$

2.3.2 Multivariate Splines

Das Konzept der univariaten Splinerräume lässt sich relativ einfach in den multivariaten Fall übertragen. Hierzu werden die Eigenschaften des Tensorprodukts (kurz: TP) ausgenutzt. Seien $T_i = \{t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(m_i+n_i)}\} \subset \mathbb{R}$ univariate uniforme Knotenvektoren für Splinerräume der Ordnung n_i , $i = 1, \dots, d$ mit Knotenabstand h_i . Durch das kartesische Produkt der einzelnen Knotenvektoren wird ein TP-Gitter

$$T = T_1 \otimes \dots \otimes T_d \quad \text{mit Gitterweite} \quad h := (h_1, \dots, h_d)$$

gebildet. Für $\mathbf{k} \in \prod_{i=1}^d \{1, \dots, m_i + n_i - 1\} =: K$ werden die Gitterzellen durch $Z_{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^d [t_i^{(k_i)}, t_i^{(k_i+1)}]$ benannt. Über diesem Gitter wird der multivariate TP-Splineraum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T) := \mathcal{S}_{n_1}(T_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{S}_{n_d}(T_d)$ der Ordnung $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d)$ betrachtet. Der kanonische Definitionsbereich dieses TP-Splineraumes ist damit $D(T) := \prod_{i=1}^d D(T_i)$. Eine Basis des TP-Splineraumes ist durch die TPB-Splines

$$B_{\mathbf{j}}(x) := b_{j_1}(x_1) \cdots b_{j_d}(x_d), \quad \mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \prod_{i=1}^d \{1, \dots, m_i\} =: I,$$

gegeben. Der zugehörige Träger ist definiert durch

$$\text{supp } B_{\mathbf{j}} = \bigcup \{Z_{\mathbf{k}} : \mathbf{j} \leq \mathbf{k} < \mathbf{j} + \mathbf{n}\} = \prod_{i=1}^d [t_i^{(j_i)}, t_i^{(j_i+n_i)}].$$

Wird ein offenes Gebiet $\Omega \subset D(T)$ betrachtet, so wird der Splineraum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ als Einschränkung des Raumes $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ auf Ω definiert (siehe Definition 2.23). Hierbei wird die Basis der B-Splines auf diejenigen reduziert, die an irgendeinem Punkt $x \in \Omega$ ungleich Null sind. Die Indexmenge der B-Spline-Basis über Ω wird dann als

$$I_{\Omega} := \{\mathbf{j} \in I \mid \text{supp } B_{\mathbf{j}} \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

definiert.

Der Raum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ ist hier analog zum univariaten Fall für $s : D(T) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Falls der gesamte \mathbb{R}^d betrachtet werden soll, so wird T aus bi-infiniten univariaten Knotenvektoren T_i , $i = 1, \dots, d$, zusammengesetzt. Die Indexmengen K und I sind in diesem Fall \mathbb{Z}^d .

Das de Boor-Fix Funktional ist auch im Multivariaten definiert und bildet ein duales Funktional zu den TPB-Splines (siehe [6], [8] oder [9]).

Satz 2.27. *Gegeben sei die B-Spline-Basis $\{B_{\mathbf{i}}\}_{\mathbf{i} \in I}$. Für $\xi \in \text{supp } B_{\mathbf{j}}$ wird durch*

$$\lambda_{\mathbf{j}}(f) := \lambda_{j_1} \circ \dots \circ \lambda_{j_d}(f) = \frac{1}{(\mathbf{n} - 1)!} \sum_{\alpha < \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{n} - 1 - \alpha|} \psi_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{n} - 1 - \alpha)}(\xi) f^{(\alpha)}(\xi)$$

mit $(\mathbf{n} - 1)! = (n_1 - 1)! \dots (n_d - 1)!$ und $\psi_{\mathbf{j}}^{\mathbf{n}}(\xi) = \psi_{j_1}^{n_1}(\xi_1) \dots \psi_{j_d}^{n_d}(\xi_d)$ ein zu den B-Splines der Ordnung \mathbf{n} duales multivariates de Boor-Fix Funktional definiert.

Die Dualität folgt direkt daraus, dass

$$\lambda_{\mathbf{j}}(B_{\mathbf{i}}) = \lambda_{j_1}(b_{i_1}) \cdot \lambda_{j_2}(b_{i_2}) \cdot \dots \cdot \lambda_{j_d}(b_{i_d}) = \delta_{j_1, i_1} \cdot \dots \cdot \delta_{j_d, i_d} = \delta_{\mathbf{j}, \mathbf{i}}$$

gilt. Die meisten Eigenschaften und Ergebnisse zu den B-Splines und ihren dualen Funktionalen sind invariant bezüglich folgender Abbildungen.

Definition 2.28. *Eine a^3 -Abbildung (axis-aligned affine) im \mathbb{R}^d wird definiert durch*

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto (a_s * x + a_t) A_p \in \mathbb{R}^d,$$

wobei $A_p \in \{0, 1\}^{d \times d}$ eine Permutationsmatrix, $a_s \in (\mathbb{R}_{\neq 0})^d$ ein Skalierungsvektor und $a_t \in \mathbb{R}^d$ eine Translation ist. Die Multiplikation $*$ mit dem Skalierungsvektor ist eine punktweise Multiplikation, das heißt,

$$a_s * x := (a_{1,s} \cdot x_1, \dots, a_{d,s} \cdot x_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

\mathcal{A} heißt isometrisch, falls alle Komponenten des Skalierungsvektors den Betrag 1 haben.

Die Anwendung einer a^3 -Abbildung auf eine Funktion $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht einer Umparametrisierung des Arguments, also $\mathcal{A}(g) := g \circ \mathcal{A}^{-1}$. Die Invarianz der B-Splines bezüglich solcher Abbildungen bedeutet zum Beispiel, dass

$$\lambda_j(B_i) = \mathcal{A}(\lambda_j)\mathcal{A}(B_i) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \lambda_j(s) = \mathcal{A}(\lambda_j)\mathcal{A}(s) \quad (2.9)$$

gilt. Um dies zu zeigen, muss die affine Transformation einmal auf ψ_j und dann auf die Ableitungen der Splinefunktion angewendet werden. Dabei ergeben sich Skalierungsfaktoren der ursprünglichen Funktionen, welche sich bei der Anwendung des Funktional auf die Splinefunktion aufheben. Ein ausführlicher Beweis hierzu ist in [42, S.42] zu finden.

Auch im multivariaten Fall ist die Kondition der B-Spline-Basis über \mathbb{R}^d gleichmäßig beschränkt. Dabei werden hier dieselben wichtigen Eigenschaften verwendet wie im univariaten Fall. Um die gleichmäßige Beschränkung der B-Spline-Basis zeigen zu können, müssen die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

E1: Die Ableitungen $\psi^{(\alpha)}$ müssen gleichmäßig beschränkt sein.

E2: Die Norm $\|s\|_\xi := \sum_{\alpha < n} |s^{(\alpha)}(\xi)|$ muss gegen die L_∞ -Norm abgeschätzt werden können.

Solange der Splineraum über \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, betrachtet wird, ist dies unproblematisch. Sobald aber auf ein krummlinig berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eingeschränkt wird, kann die gleichmäßige Beschränkung verloren gehen. Ist das Gitter ungünstig gewählt, so kann eine der Bedingungen E1 und E2 verletzt werden. Mößner hat in seiner Dissertation [42] gezeigt, dass in fast allen Fällen eine Normierung der B-Splines zu einer Stabilisierung führt. Dieses Thema wird in Abschnitt 2.4 näher betrachtet.

Unabhängig von Normierung und Stabilität der Basis entsteht bei der Einschränkung auf ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, ein weiteres Problem. In dieser Arbeit sollen Fehlerabschätzungen der Form (2.11) beziehungsweise (2.4) untersucht werden. Eine optimale Approximationsordnung ist allerdings nicht für beliebige Gebiete gewährleistet. Ein Beispiel hierfür wird nun gegeben.

Beispiel 2.29. Gegeben sei das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq \sqrt{|x|}\}.$$

Darüber sei das TP-Gitter bestehend aus $T_1 = T_2 = \{\dots, -3h, -h, h, 3h, \dots\}$ gelegt.

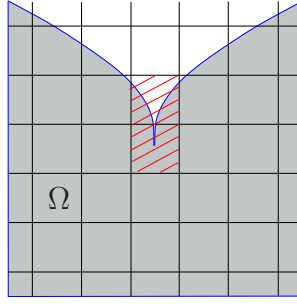


Abbildung 2.2: Beispielgebiet für Approximationsprobleme mit B-Splines

Es soll die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} y & y \geq 0, x \geq 0 \\ -y & y \geq 0, x \leq 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

mit Splines der Ordnung $\mathbf{n} = (1, 1)$ approximiert werden. Auf dem rot markierten Streifen und sogar für $-h \leq x \leq h$ muss der in der ∞ -Norm best approximierende Spline den Wert 0 haben, da die hier liegenden B-Splines zum einen Teil den Funktionswert $-y$ und zum anderen Teil y approximieren müssen. In diesem Bereich entsteht der größte Fehler bezüglich der ∞ -Norm. Es gilt

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} = \sqrt{h}.$$

Nach der gewünschten Fehlerabschätzung soll jedoch

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} \leq C \cdot (h \|\partial_1 f\|_{\infty, \Omega} + h \|\partial_2 f\|_{\infty, \Omega}) = C \cdot h$$

gelten. Das heißt, dass die gewünschte Approximationsordnung nicht erreicht werden kann beziehungsweise für kleine Gitterweiten die Konstante C beliebig groß wird. ■

Der TP-Spliner Raum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ ist für die gewünschte Approximation nicht groß genug. Der größte Spliner Raum über Ω ist definiert durch

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega) := \{s : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid s|_{Z_{\mathbf{k}} \cap \Omega} \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}(Z_{\mathbf{k}} \cap \Omega) \text{ für } \mathbf{k} \in K \text{ und } s^{(\alpha)} \in C(\Omega) \text{ für alle } \alpha \leq \mathbf{n} - 2\}.$$

Das Gebiet in Beispiel 2.29 ist kein Lipschitzgraph Gebiet. Die Betrachtung der Klasse der Lipschitzgraph Gebiete ist allerdings durchaus ausreichend. Wie im nächsten Beispiel und darauf folgenden Abschnitt 2.3.3 gezeigt wird, gibt es auch bei Lipschitzgraph Gebieten Probleme.

Beispiel 2.30. Gegeben sei das Gebiet

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq |x|\}.$$

Das TP-Gitter sei durch $T_1 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ und $T_2 = \{\dots, -h, 0, h, \dots\}$ mit $h = 1/l$ für $l \in \mathbb{Z}$ bestimmt. Mit den zugehörigen TPB-Splines der Ordnung $\mathbf{n} = (1, 1)$ soll erneut die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} y & y \geq 0, x \geq 0 \\ -y & y \geq 0, x \leq 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

approximiert werden.

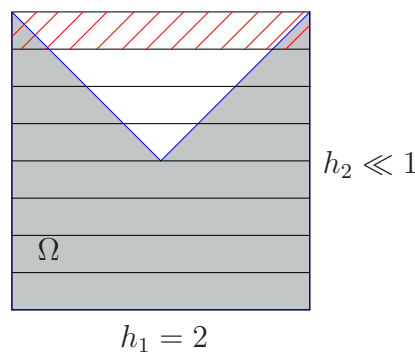


Abbildung 2.3: Beispielgebiet für Approximationsprobleme mit B-Splines

Der B-Spline auf dem rot markierten Streifen muss einerseits den Wert -1 andererseits den Wert 1 approximieren. Der zugehörige Koeffizient und damit der Spline in diesem Bereich wird daher als 0 gewählt. Somit folgt

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} = 1.$$

Erneut sollte für den Fehler

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} \leq C \cdot (h_1 \|\partial_1 f\|_{\infty, \Omega} + h_2 \|\partial_2 f\|_{\infty, \Omega}) = C \cdot h_2$$

gelten. Der tatsächliche Fehler ist konstant, egal wie fein h_2 gewählt wird. Die Konstante C ist somit von dem Verhältnis der Gitterweiten abhängig. ■

Diese Problematik tritt nicht nur bei speziell gewählten Gebieten auf. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, besteht diese Abhängigkeit der Konstanten von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen generell, wenn Funktionen aus anisotropen Sobolevräumen approximiert werden sollen.

2.3.3 Approximation mit Splines

In diesem Abschnitt seien durch $T_i = \{t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(m_i+n_i)}\}$ für $i = 1, \dots, d$ nicht notwendiger Weise uniforme Knotenfolgen gegeben. Ein Tensorprodukt-Gitter wird durch $T := T_1 \otimes \dots \otimes T_d$ gebildet. Mit $h_{\mathbf{k}}$ wird der Seitenlängenvektor der Gitterzelle $Z_{\mathbf{k}}$ bezeichnet und mit $h := \max_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}}$ das koordinatenweise Maximum für das gesamte Gitter. Sei $\lambda_{\mathbf{j}}$ das *multivariate de Boor-Fix Funktional* und

$$Q(f) := \sum_{\mathbf{j} \in I_{\Omega}} \lambda_{\mathbf{j}}(f) B_{\mathbf{j}}$$

der zugehörige Quasiinterpolant. Detailliertere Informationen hierzu sind beispielsweise in [9] zu finden. Der so definierte Quasiinterpolant ist aufgrund des verwendeten de Boor-Fix Funktional nur auf Funktionen aus $C^{\mathbf{n}-1}$ anwendbar. Um einen Operator $Q : L_p \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ zu erhalten, gibt es verschiedene Möglichkeiten, $\lambda_{\mathbf{j}}$ zu modifizieren. Eine konstruktive Variante wird in Kapitel 4.2.3 vorgestellt. Dahmen, DeVore und Scherer [21, S. 393 f] stellen Bedingungen (siehe (2.10)) an $\Omega \subset D(T)$ und T , welche die Existenz eines Funktional $\tilde{\lambda}_{\mathbf{j}}$ garantieren, so dass durch

$$\tilde{Q}(f) = \sum_{\mathbf{j} \in I_{\Omega}} \tilde{\lambda}_{\mathbf{j}}(f) B_{\mathbf{j}}$$

ein Operator $\tilde{Q} : L_p(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ definiert ist. Die Summation verläuft über alle \mathbf{j} mit $\text{supp } B_{\mathbf{j}} \cap \Omega \neq \emptyset$.

Sei $K_{\Omega} = \{\mathbf{j} : Z_{\mathbf{j}} \cap \Omega \neq \emptyset\}$ und $\tilde{K}_{\Omega} = \{\mathbf{k} : \mathbf{j} - \mathbf{n} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{j} + \mathbf{n} \text{ mit } \mathbf{j} \in K_{\Omega}\}$. Weiter sei $Z_{\mathbf{j}}(C)$ für eine Konstante C das Rechteck mit dem selben Zentrum wie $Z_{\mathbf{j}}$ jedoch mit dem Seitenlängenvektor $C \cdot h_{\mathbf{j}}$.

Damit $\tilde{\lambda}_{\mathbf{j}}$ existiert, muss für Ω und T folgende Eigenschaft erfüllt sein:

Sei Ω koordinatenweise konvex (2.6) und es existieren (2.10)

Konstanten $C_1, C_2 > 1$, so dass für jedes $\mathbf{j} \in \tilde{K}_{\Omega}$ Rechtecke

$R_{\mathbf{j}} \subseteq Z_{\mathbf{j}}(C_1) \cap \Omega$ und $P_{\mathbf{j}} \subseteq \Omega$ existieren mit

(i) $h_{R_{\mathbf{j}}} \geq C_1^{-1} h_{\mathbf{j}},$

(ii) $P_{\mathbf{j}}$ überdeckt $\cup_{\mathbf{j}-\mathbf{n} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{j}} Z_{\mathbf{k}}(|\mathbf{n}|C_1) = S_{\mathbf{j}}$ maximal
in der Distanz C_2 und $h_{P_{\mathbf{j}}} \leq C_1^{-1} h_{S_{\mathbf{j}}}.$

Hierbei müssen die Rechtecke $R_{\mathbf{j}}$ und $P_{\mathbf{j}}$ nicht aus dem Tensorprodukt-Gitter T sein.

Auf diesen Gebieten kann für Funktionen aus $W_p^{\mathbf{n}}$ eine Abschätzung ähnlich zu (2.5) gezeigt werden.

Satz 2.31 (Dahmen, DeVore und Scherer, [21]). *Falls Ω und T Bedingung (2.10) genügen, gilt für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$*

$$\|f - \tilde{Q}(f)\|_{p,\Omega} \leq C \sum_{i=1}^d h_i^{n_i} \|D^{n_i e_i} f\|_{p,\Omega}, \quad (2.11)$$

mit $h = \max_{j \in I_\Omega} h_j$.

Falls Ω zusätzlich (2.7) erfüllt, dann gilt für jedes $f \in L_p(\Omega)$

$$\|f - \tilde{Q}(f)\|_{p,\Omega} \leq C \omega_{\mathbf{n}}(f, h, \Omega)_p. \quad (2.12)$$

Die Konstante C hängt von \mathbf{n} , p , Ω und den Konstanten aus (2.10) ab.

Beweisschema:

Für $x \in Z_{\mathbf{j}} \cap \Omega$ und $P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) - \tilde{Q}(f, x) &= f(x) - P(x) - \tilde{Q}(f - P, x) \\ &= f(x) - P(x) - \sum_{\mathbf{j} - \mathbf{n} \leq \mathbf{k} < \mathbf{j}} \lambda_{\mathbf{k}}(f - P) B_{\mathbf{k}}(x) \end{aligned}$$

Über die Eigenschaften, welche bei der Konstruktion von $\tilde{\lambda}_{\mathbf{k}}$ entstehen, zeigen Dahmen, DeVore und Scherer, dass dann

$$\|f - \tilde{Q}(f)\|_{p, Z_{\mathbf{j}} \cap \Omega} \leq C \cdot \|f - P\|_{p, S_{\mathbf{j}} \cap \Omega}.$$

Mit Theorem 2.13 und durch die Konstruktion, dass ein $P_{\mathbf{j}}$ existieren muss, welches $S_{\mathbf{j}}$ maximal in der Distanz C_2 überdeckt, folgt

$$\|f - P\|_{p, S_{\mathbf{j}} \cap \Omega} \leq C \sum_{i=1}^d h_{S_{\mathbf{j}}}^{n_i e_i} \|\partial_i^{n_i} f\|_{p, \tilde{S}_{\mathbf{j}} \cap \Omega}$$

für $\tilde{S}_{\mathbf{j}} := \cup_{\mathbf{j} - \mathbf{n} \leq \mathbf{k} < \mathbf{j}} Z_{\mathbf{k}}(|\mathbf{n}| C_1 (2C_2^2 + 1))$. Damit erhalten sie

$$\|f - \tilde{Q}(f)\|_{p, Z_{\mathbf{j}} \cap \Omega}^p \leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} f\|_{p, \tilde{S}_{\mathbf{j}} \cap \Omega}^p h_{S_{\mathbf{j}}}^{p n_i e_i}.$$

Unter anderem über eine Summation über \mathbf{j} folgt die gewünschte Abschätzung. \square

Dahmen, DeVore und Scherer erwähnen, dass unter anderem diejenigen koordinatenweise konvexen Gebiete Eigenschaft (2.10) erfüllen, die in Teilgebiete

aufgeteilt werden können, welche eine Kegeleigenschaft für einen Kegel erfüllen, der eine Ecke im Ursprung hat und eine Koordinatenachse enthält. Hierfür müssen allerdings die Rechtecke in T klein genug sein.

In der Bedingung an die Gebiete ist ein Problem versteckt, welches nicht offensichtlich ist. Die Abhängigkeit der Konstanten C in Satz 2.31 von den Konstanten C_1 und C_2 ist nicht wünschenswert. Das Problem hierbei wird durch die folgenden Beispiele aufgezeigt.

Beispiel 2.32. Betragsfunktion, $d = 2$

Betrachtet wird ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dessen Rand in einer Umgebung U um den Ursprung durch die Betragsfunktion beschrieben wird, das heißt,

$$\partial\Omega|_U = \{(x, y) \in U : y = |x|\}.$$

Sei $Z = [-s, s] \times [-l, l]$ mit $h_Z = (2s, 2l)$ eine Gitterzelle aus dem Tensorprodukt-Gitter T . Außerdem sei $Z(K) = [-sK, sK] \times [-lK, lK]$ mit $h_{Z(K)} = (2sK, 2lK)$ für eine Konstante K .

Sei R das Rechteck zu Z aus der Gebietskonstruktion (2.10). Dann müssen für R die Bedingungen

$$(i) \quad \left(\frac{2s}{K}, \frac{2l}{K}\right) \leq h_R \leq (2sK, 2lK)$$

$$(ii) \quad R \subseteq Z(K) \cap \Omega$$

erfüllt sein. Es lässt sich leicht einsehen, dass dann

$$R = \left[-\frac{s}{K}, \frac{s}{K}\right] \times \left[r - \frac{l}{K}, r + \frac{l}{K}\right]$$

für $r \geq \frac{s}{K}$ zu wählen ist. Für die Konstante K muss damit

$$Kl \geq \frac{s}{K} + \frac{l}{K} \quad \Rightarrow \quad K \geq \sqrt{\frac{s}{l} + 1}$$

gelten. Die Konstanten in der Fehlerabschätzung sind somit abhängig von dem Seitenverhältnis der Rechtecke des Tensorprodukt-Gitters. ■

Beispiel 2.33. Parabel, $d = 2$

Der Rand sei statt durch die Betragsfunktion in Beispiel 2.32 durch eine Parabel beschrieben. Durch analoge Rechnung folgt, dass auch hier K und damit C von

dem Verhältnis s/l abhängig ist. Genauer ergibt sich:

$$K \geq \max \left\{ 1, \sqrt[3]{\frac{s^2}{l}} \right\}.$$

■

Die beiden Beispiele zeigen, dass sowohl für ein glattes als auch für ein nicht glattes Randstück die Konstante in der Fehlerabschätzung aus Theorem 2.31 von dem Seitenverhältnis s/h abhängt. Dies ist natürlich nicht erwünscht, denn die Vergrößerung des Splineraumes durch Hinzufügen von Knotenpunkten in nur einer Richtung ($l \rightarrow 0$) führt zu einer Verschlechterung in der Fehlerschranke führt.

Ist das Gebiet ein Rechteck mit zu den Koordinatenachsen parallelen Kanten, so besteht diese Abhängigkeit nicht. Schumaker [50, S.491] zeigt, dass die Abschätzung über Rechtecken gültig ist. Dabei tritt eine Abhängigkeit der Konstanten von einem Parameter γ auf. Für uniforme Gitter gilt allerdings immer $\gamma = 1$, sodass diese Abhängigkeit nicht kritisch ist. Diese Tatsache wird im nächsten Kapitel ausgenutzt.

Bei der Abschätzung über den Stetigkeitsmodul (2.12) gibt es klare Grenzen, die auch schon in [21] angedeutet werden. Allerdings besteht die Hoffnung, die Abhängigkeit von dem Gitter bei der Fehlerabschätzung der Form (2.11) umgehen zu können.

Zusammenfassend lassen sich die folgenden drei Punkte als mögliche Probleme der Tensorprodukt-Splineapproximation auf beschränkten Gebieten benennen:

1. Instabilität der B-Spline-Basis.
2. Verlust an Approximationsordnung.
3. Abhängigkeit von den Knotengittern.

Eine Methode, die die ersten beiden Punkte löst, ist das Erweitern und Ankoppeln der B-Splines. Dieses Verfahren wird in Abschnitt 2.5 geschildert. Allerdings soll hier direkt darauf hingewiesen werden, dass das dritte Problem mit diesem Verfahren nicht behoben werden kann.

2.4 Normierte B-Splines

Das Problem der Instabilität der Basis kann in den meisten Fällen durch eine einfache Normierung der B-Splines behoben werden.

Definition 2.34 (Möckner und Reif, [43]). *Für ein gegebenes beschränktes und offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $1 \leq p \leq \infty$ sind die normierten B-Splines definiert als*

$$B_{\mathbf{i}}^p := \frac{B_{\mathbf{i}}}{\|B_{\mathbf{i}}\|_{p,\Omega}}, \quad \mathbf{i} \in I_{\Omega}.$$

Um zeigen zu können, dass die Konditionszahl der normierten Basis gleichmäßig beschränkt ist, müssen die beiden Bedingungen E1 und E2 auf Seite 23 erfüllt sein. Möckner [42, S. 104 ff, S.128 ff] hat herausgefunden, dass für zusammenhängende Schnitte $\text{supp } B_{\mathbf{i}} \cap \Omega$ und die normierte B-Spline-Basis die Bedingungen E1 und E2 auf Seite 23 abhängig von dem Gebietsrand erfüllt sind, falls eines der folgenden Kriterien gilt:

K1: Eine Ecke des Trägers liegt in $\bar{\Omega}$.

K2: Mindestens zwei Knoten liegen in dem Gebiet $\bar{\Omega}$.

Für $\Omega := (r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$ ist weder K1 noch K2 erfüllt, wenn das Gebiet Ω keinen der Knoten aus T enthält, das heißt, wenn $t_n < r_1 < r_2 < t_{n+1}$ gilt. In diesem Fall könnte somit die Basis der normierten B-Splines instabil sein.

Beispiel 2.35 (Möckner, [42]). Gegeben sei $\Omega = [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ und die Knotenfolge $T = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Die B-Splines seien von der Ordnung $n = 2$. Diese bilden mit den Koeffizienten $F = (1, -1)$ den Spline $s(t) := B F$.

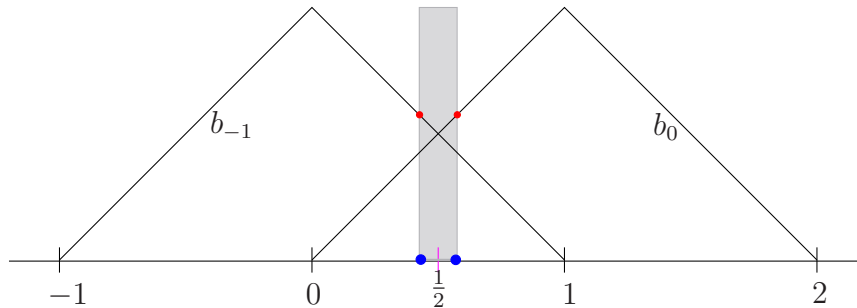


Abbildung 2.4: Instabile B-Splines mit keinem Knoten im Gebiet

Für $t \in [0, 1]$ gilt:

$$b_{-1}(t) = 1 - t \quad \text{und} \quad b_0(t) = t.$$

Normieren der B-Splines ergibt dann:

$$b_{-1}^p = \frac{b_{-1}(t)}{b_{-1}(\frac{1}{2} - \varepsilon)} = \frac{1-t}{\frac{1}{2} + \varepsilon} \quad b_0^p(t) = \frac{b_0(t)}{b_0(\frac{1}{2} + \varepsilon)} = \frac{t}{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

$$\Rightarrow \|F\|_\infty = 1 \text{ und } \|s\|_{\infty, \Omega} = \frac{2\varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gibt es keine Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ mit $c\|F\|_\infty \leq \|s\|_{\infty, \Omega} \leq C\|F\|_\infty$, so dass $\frac{C}{c}$ gleichmäßig beschränkt ist. \blacksquare

Die durch Normieren stabilisierbaren B-Splines können nach [43] über folgende Eigenschaft beschrieben werden.

Definition 2.36. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Ein B-Spline $B_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in I_\Omega$, mit Träger $\text{supp } B_{\mathbf{i}}$ und $\text{supp } B_{\mathbf{i}}^\Omega := \text{supp } B_{\mathbf{i}} \cap \bar{\Omega}$ heißt α -proper, falls zwei Quadern beziehungsweise Rechtecke $P_{\mathbf{i}}$ und $R_{\mathbf{i}}$ mit Seitenlängenvektoren $|P_{\mathbf{i}}|$ und $|R_{\mathbf{i}}|$ existieren, so dass für $\alpha \geq 1$ gilt

- a) $P_{\mathbf{i}} \subset \text{supp } B_{\mathbf{i}}^\Omega \subset R_{\mathbf{i}}$.
- b) $\frac{1}{\alpha}|R_{\mathbf{i}}| = |P_{\mathbf{i}}|$.
- c) $R_{\mathbf{i}}$ und $\text{supp } B_{\mathbf{i}}$ haben eine gemeinsame Ecke.
- d) $P_{\mathbf{i}}$ ist vollständig in einer Gitterzelle enthalten.

Sei

$$B_\bullet^p := \{B_{\mathbf{i}}^p : B_{\mathbf{i}}^p \text{ ist } \alpha\text{-proper}\}$$

die Menge der normierten α -proper B-Splines. Diese bildet eine stabile Basis.

Satz 2.37 (Möckner und Reif, [43]). Die Konditionszahl der normierten α -proper B-Splines B_\bullet^p ist beschränkt durch

$$\text{cond}_p B_\bullet^p \leq M,$$

wobei die Konstante M von \mathbf{n} , p , d und α abhängig ist, aber weder von T noch von Ω .

Liegt ein B-Spline vollständig in dem Gebiet, so ist er ohne Zweifel α -proper. Problematisch sind die B-Splines, welche den Rand schneiden. Die Beweise und weitere Erläuterungen hierzu sind in [43] oder auch [42] zu finden, wobei im

zweiten sogenannte *substantielle* B-Splines betrachtet werden. Ein B-Spline der Ordnung $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ ist im Prinzip dann substantiell, wenn er α -proper mit $\alpha = \max_i n_i$ ist. Die von Mößner bestimmten Kriterien K1 und K2 auf Seite 30 sind somit auch für die Eigenschaft, α -proper zu sein, relevant.

Für univariate Splines gibt es zwei problematische Konstellationen von Gebiet und Knoten. In Beispiel 2.35 wurde gezeigt, dass die B-Spline-Basis instabil sein kann, wenn kein Knoten in dem Gebiet enthalten ist. Aber auch die Platzierung eines Knotens in dem Gebiet garantiert nicht, dass alle B-Splines α -proper sind.

Beispiel 2.38. Gegeben sei das Gebiet $\Omega = [2 - \varepsilon, 2 + 2 \cdot \varepsilon]$ und die Knotenfolge $T = \{\dots, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Betrachtet wird der B-Spline b_0 der Ordnung 4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Es werden nun die Intervalle R_0 und P_0 bestimmt, welche nach Definition 2.36 für die Eigenschaft α -proper zu sein, existieren müssen.

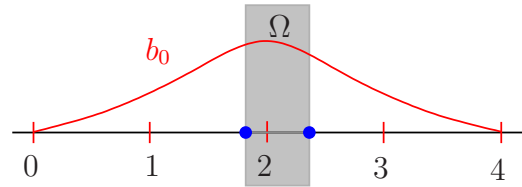


Abbildung 2.5: Instabiler B-Spline mit einem Knoten im Gebiet

Das Intervall P_0 muss vollständig zwischen zwei Knoten liegen. Es sei daher $P_0 \subset (2, 2 + 2 \cdot \varepsilon)$. Weiter ist für R_0 das kleinste mögliche Intervall $[2 - \varepsilon, 4]$. Damit der B-Spline α -proper ist, muss ein $\alpha \geq 1$ existieren, sodass $\frac{1}{\alpha}|R_0| = |P_0|$. Nun gilt

$$|P_0| = 2 \cdot \varepsilon = \frac{1}{\alpha}|R_0| = \frac{1}{\alpha}(2 + \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}.$$

Nun ist zwar $\alpha \geq 1$ für $\varepsilon \leq 2$ erfüllt, allerdings ist α für ein beliebig kleines Gebiet Ω unbeschränkt. Der B-Spline ist somit auch nicht α -proper. ■

Auch im bivariaten Fall sind B-Spline-Basen unproblematisch, wenn die den Rand $\partial\Omega$ schneidenden Träger eines der Kriterien K1 und K2 auf Seite 30 erfüllen. Allerdings spielt hier die angedeutete Abhängigkeit von dem Gebietsrand eine wesentliche Rolle. Die B-Splines zu den in Abbildung 2.6 dargestellten Trägern sind substantielle B-Splines (siehe [42, S.129 ff]) und durch Normieren stabilisierbar. Die Normierung bezüglich der L_p -Norm führt nicht notwendigerweise zu demselben Ergebnis, wenn der Rand des Gebietes nicht konvex ist. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass die in Abbildung 2.6 veranschaulichten Fälle auch bei nicht konvexem Rand α -proper sind, wobei α von dem Gebietsrand abhängig ist.

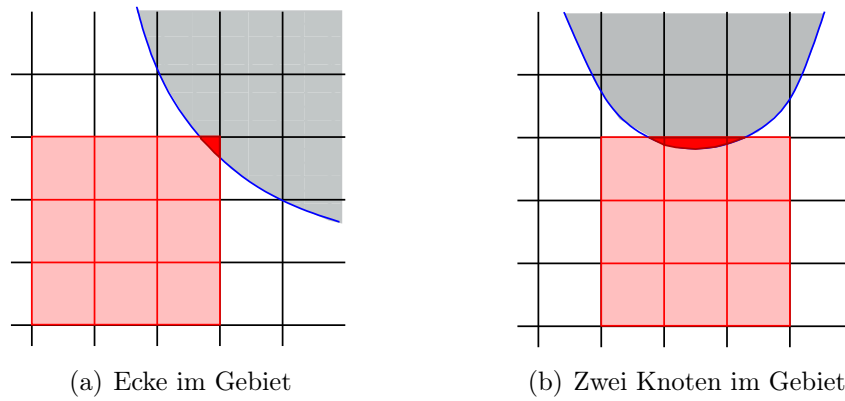


Abbildung 2.6: Beispiele durch Normierung stabilisierbarer B-Splines

Bei nicht stabilisierbaren B-Splines lässt sich nur ein α bestimmen, welches von der Größe des Schnittes zwischen $\text{supp } B_i$ und Ω abhängt. Wie ein solcher Fall aussehen kann, wird nun verdeutlicht.

Beispiel 2.39. Sei Ω ein Lipschitzgraph Gebiet in \mathbb{R}^2 . Der Schnitt $\text{supp } B_i^\Omega$ sei konvex, sehr klein und vollständig in einer Zelle des Trägers enthalten (siehe Abbildung 2.7). Hier sei $\mathbf{n} = (n, n)$.

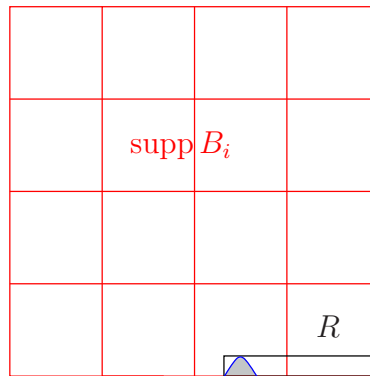
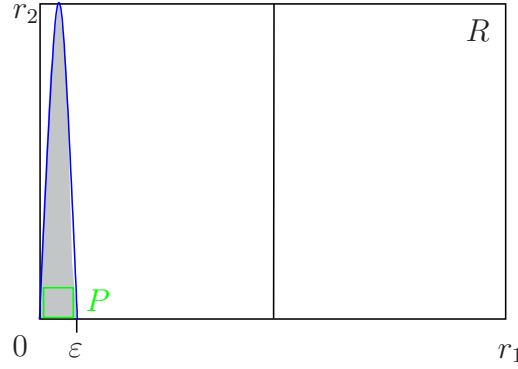


Abbildung 2.7: Problemfall im Bivariaten

Sei R das Rechteck aus Definition 2.36 mit $|R| = (r_1, r_2) \leq (\frac{n+1}{2} h_1, h_2)$. Weiter sei P das in $\text{supp } B_i^\Omega$ liegende Rechteck mit

$$|P| = \frac{1}{\alpha} (r_1, r_2).$$

Diese Konstellation ist für das hier betrachtete Beispiel in Abbildung 2.8 veranschaulicht.

Abbildung 2.8: Darstellung der Rechtecke R und P

Sei φ eine Funktion, welche den Rand des Schnittes beschreibt und eine Lipschitz-Bedingung mit Konstante L erfüllt. Weiter sei $\varphi(0) = \varphi(\varepsilon) = 0$ und $\varphi(\xi_0) = r_2$ für ein $\xi_0 \in (0, \varepsilon)$. Damit gilt:

- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(0)| \leq L \cdot \xi_0$
- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(\varepsilon)| \leq L \cdot (\varepsilon - \xi_0)$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_2}{L} \leq \xi_0 \leq \varepsilon - \frac{r_2}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2r_2}{\varepsilon} \leq L.}$$

Das heißt, damit ein solcher Schnitt entstehen kann, muss $\frac{2r_2}{\varepsilon} \leq L$ erfüllt sein.

Da der Schnitt konvex ist, verläuft der Graph von φ über den beiden Geraden

$$f(x) = \frac{r_2}{\xi_0} \cdot x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{r_2}{\xi_0 - \varepsilon} \cdot x - \varepsilon \cdot \frac{r_2}{\xi_0 - \varepsilon}$$

und damit außerhalb des Dreiecks mit den Eckpunkten (ξ_0, r_2) , $(0, 0)$ und $(\varepsilon, 0)$. In diesem Dreieck lässt sich ein Rechteck P mit $|P| < (\varepsilon, r_2)$ finden. Daher folgt

$$\boxed{\alpha > \max \left\{ 1, \frac{r_1}{\varepsilon} \right\} .}$$

Dies ist allerdings für $\varepsilon \rightarrow 0$ unbeschränkt. Für die Konditionszahl der B-Spline-Basis bedeutet das, dass sie nicht gleichmäßig beschränkt sein kann. ■

Eine weitere Konstellation, welche durch Normierung nicht stabilisiert wird, ist in Abbildung 2.9 gegeben. Hier liegt in x -Richtung weder ein Eckpunkt noch ein vollständiges Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ in dem Gebiet. Analog zu Beispiel 2.39 kann gezeigt werden, dass α unbeschränkt ist.

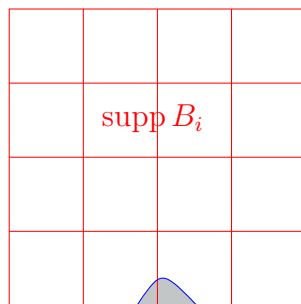


Abbildung 2.9: Beispiel eines weiteren Problemfalls im Bivariaten

In den meisten Fällen führt das Normieren der B-Splines auf beschränkten Gebieten zu einer stabilen Basis. Die nicht stabilisierbaren B-Splines (siehe Abbildung 2.7 oder 2.9) treten sehr selten auf. Es ist daher möglich ohne Approximationskraft zu verlieren, diese B-Splines einfach aus der Konstruktion zu entfernen. Allerdings hat dies zur Folge, dass die Splineräume nicht mehr ineinander geschachtelt sind. Nähere Erläuterungen sind in der Arbeit von Reif und Mößner [43] zu finden.

Das in Beispiel 2.29 aufgezeigte Problem, dass der Spliner Raum $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ für nicht konvexe Gebiete zu klein ist, lässt sich durch das Normieren nicht beheben. Die Auflösung des Gitters muss an das Gebiet soweit angepasst werden, dass die Schnitte $\text{supp } B_i \cap \Omega$ zusammenhängend sind. Approximationen auf Gebieten wie in Beispiel 2.29 sind somit immer noch nicht in ausreichender Güte möglich. Auch die Abhängigkeit $C = C(h_1/h_2)$ der Konstanten in der Fehlerabschätzung bleibt erhalten.

2.5 eB-Splines

Das Erweitern der B-Splines ist ein weiteres Verfahren, durch das versucht wird, die Probleme der klassischen TP-Splineapproximation zu lösen. Die hohen Konditionszahlen der B-Spline-Basen hängen vor allem mit der Konstellation von Gebiet und Gitter zusammen. Die Untersuchungen in Abschnitt 2.4 über die normierten B-Splines zeigen, dass diejenigen B-Spline für die sehr großen Konditionszahlen verantwortlich sind, deren Träger ungünstige und besonders kleine Schnitte mit dem Gebiet haben. Die Erweiterung des Trägers ist somit eine naheliegende Idee. Das Verfahren der sogenannten WEB-Splines (gewichtete erweiterte B-Splines) wurde von Hölbig, Reif und Wipper ([32], [34] oder [35]) entwickelt, um die Splineapproximation sinnvoll für die Methode der Finiten Elemente verwenden zu können. Die Gewichtung, welche zur Einhaltung von Randbedingungen eingesetzt wird, wird hier nicht näher betrachtet. Hier ist der

Erweiterungsaspekt von Bedeutung, da dies zu einer Stabilisierung führt. Im Folgenden sei die Ordnung n der B-Splines in allen Richtungen gleich. Bevor das Konzept der Erweiterung vorgestellt wird, werden die kritischen und unkritischen B-Splines unterschieden.

Definition 2.40. Gegeben sei ein uniformes Gitter T mit Gitterweite h über einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

1. Eine Gitterzelle $Z_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in K$ heißt innere Zelle, falls $Z_{\mathbf{k}} \subseteq \Omega$. Falls $Z_{\mathbf{k}} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, wird sie Randzelle genannt.
2. Ein TPB-Spline $B_{\mathbf{j}}$ wird als innerer B-Spline bezeichnet, falls eine innere Zelle existiert, die im Träger von $B_{\mathbf{j}}$ enthalten ist, das heißt, falls gilt:

$$\exists Z_{\mathbf{k}} \subseteq \Omega : Z_{\mathbf{k}} \subseteq \text{supp } B_{\mathbf{j}}.$$

Ist dies nicht der Fall, so wird $B_{\mathbf{j}}$ mit $B_{\mathbf{j}} \cap \Omega \neq \emptyset$ äußerer B-Spline genannt. Die Menge der Indizes der inneren B-Splines sei I und die der äußeren B-Splines sei J .

Beispiele für innere und äußere B-Splines sind in Abbildung 2.40 markiert.

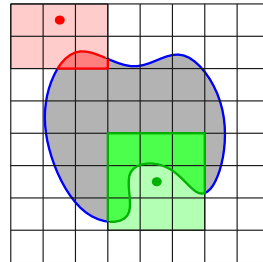


Abbildung 2.10: Innerer und äußerer B-Spline

Die erste Überlegung ist die äußeren B-Splines wegzulassen. Bei den zuvor betrachteten normierten B-Splines war dies ohne Verlust an Approximationskraft möglich. Allerdings würde dieses Vorgehen bei der sehr groben Einteilung in innere und äußere B-Splines zu einem Verlust an Approximationskraft am Rand führen.

Statt des Weglassens der äußeren B-Splines werden diese an innere angekoppelt:

$$B_{\mathbf{i}}^e := B_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{j} \in J} e_{\mathbf{ij}} B_{\mathbf{j}} \quad \text{für } \mathbf{i} \in I, e_{\mathbf{ij}} \in \mathbb{R}.$$

Diese Konstruktion soll nun zu einer stabilen Basis führen. Der entscheidende Punkt hierbei ist die Wahl der Koeffizienten e_{ij} . Bei den hier betrachteten uniformen Gittern müssen die Koeffizienten zwei Punkte erfüllen.

1. Lokalitätsbedingung:

Durch das Erweitern der B-Splines werden auch die Träger vergrößert. Eine wichtige Eigenschaft der B-Splines ist aber ihr lokaler und kompakter Träger. Durch die Wahl der Koeffizienten soll gewährleistet werden, dass eine „lokale“ Ankopplung geschieht.

2. Beschränktheit:

Um eine stabile Basis zu erzeugen, müssen die Koeffizienten beschränkt sein. Dies ergibt sich offensichtlich aus Ungleichung (2.8), aus deren Konstanten die Konditionszahl bestimmt wird.

Höllig und Reif [33] haben näher untersucht, welche Bedingungen sich im nicht uniformen Fall ergeben und wie dann die Koeffizienten bestimmt werden können. Die Bestimmung der Koeffizienten im uniformen Fall kann vereinfacht werden. Es wird hier die grobe Idee der Bestimmung der Koeffizienten angegeben; detailliertere Informationen können in [32], [36] oder auch [42] nachgelesen werden. Die Konstruktion der Erweitungskoeffizienten beruht darauf, dass ein Polynom der Ordnung n auf Ω durch die B-Spline-Basis als

$$p(x) = \sum_{i \in I} q(i) B_i(x) + \sum_{j \in J} q(j) B_j(x)$$

dargestellt werden kann, wobei die Koeffizienten über ein Polynom $q \in \mathbb{P}_n$ gegeben sind (siehe zum Beispiel [8]). Dies ist ein bekanntes Resultat. Für den univariaten Fall zeigt dies zum Beispiel Schoenberg [48]. Es folgt allerdings für die TPB-Splines über einem uniformen Gitter auch über die Marsden-Identität (siehe [32]).

Die Koeffizienten der äußeren B-Splines sollen über die inneren B-Splines bestimmt werden. Dabei sollen die äußeren B-Splines an eine nächstgelegene innere Zelle Z_l angekoppelt werden. Bei der Bestimmung der Koeffizienten $q(j)$ wird wie folgt vorgegangen:

1. Das Polynom $q \in \mathbb{P}_n$ lässt sich eingeschränkt auf die Zelle Z_l durch die Koeffizienten $q(i)$ für $i \in I(j) := l + \{0, \dots, n-1\}^d \subset I$ darstellen. Auf dem Indexgitter $I(j)$ werden dazu die Lagrangepolynome l_{ji} ausgenutzt. Diese sind hier als Tensorprodukt der univariaten Lagrangepolynome definiert, so dass $l_{ji}(k) = \delta_{i,k}$ für $i, k \in I(j)$.

Die Werte $q(i)$ werden durch die Lagrangepolynome l_{ji} interpoliert. Es gilt dann $q = \sum_{i \in I(j)} q(i) l_{ji}$.

2. Das bezüglich der Lagrangepolynome bestimmte Polynom über der Zelle

$Z_{\mathbf{l}}$ kann in den \mathbb{R}^d fortgesetzt werden. Um nun den Koeffizienten $q(\mathbf{j})$ zu erhalten, wird an der Stelle \mathbf{j} ausgewertet, also $q(\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i} \in I(\mathbf{j})} q(\mathbf{i}) l_{\mathbf{j}\mathbf{i}}(\mathbf{j})$.

Um das Polynom p darzustellen, werden an jeden inneren B-Spline $B_{\mathbf{i}}$ diejenigen äußeren B-Splines $B_{\mathbf{j}}$ angekoppelt, für die $\mathbf{i} \in I(\mathbf{j})$ gilt. Mit

$$e_{\mathbf{i}\mathbf{j}} := \begin{cases} l_{\mathbf{j}\mathbf{i}}(\mathbf{j}) & \text{falls } \mathbf{i} \in I(\mathbf{j}) \\ 0 & \text{falls } \mathbf{i} \notin I(\mathbf{j}) \end{cases}$$

gilt für das Polynom p und für $x \in \Omega$:

$$p(x) = \sum_{\mathbf{i} \in I} q(\mathbf{i}) \left(B_{\mathbf{i}}(x) + \sum_{\mathbf{j} \in J} e_{\mathbf{i}\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}(x) \right).$$

Durch das Ankoppeln an eine nächstgelegene innere Zelle $Z_{\mathbf{l}}$ bleibt in den meisten Fällen die Lokalität der B-Splines erhalten. Allerdings muss die Gitterweite hier immer an das Gebiet angepasst werden. Ist diese bezogen auf das Gebiet zu groß, so ist möglicherweise die Lokalität nicht mehr erfüllt. Ein Beispielgebiet zeigt Mößner [42, S.68]. Durch die Konstruktionsweise hängt der Wert der Koeffizienten nur von dem Abstand des äußeren B-Splines zu der inneren Zelle ab, die für die Ankopplung gewählt wurde. Damit ist auch die zweite Voraussetzung an die Koeffizienten gewährleistet. Die EB-Splines sind also für $\mathbf{i} \in I$ durch

$$B_{\mathbf{i}}^e := B_{\mathbf{i}} + \sum_{\mathbf{j} \in J(\mathbf{i})} e_{\mathbf{i}\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}} \quad \text{mit } J(\mathbf{i}) := \{\mathbf{j} \in J : \mathbf{i} \in I(\mathbf{j})\}$$

mit den Koeffizienten

$$e_{\mathbf{i}\mathbf{j}} := \begin{cases} l_{\mathbf{j}\mathbf{i}}(\mathbf{j}) & \mathbf{i} \in I(\mathbf{j}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt.

Für die so konstruierten EB-Splines kann sowohl die Stabilität als auch eine optimale Approximationsordnung nachgewiesen werden. Ausführliche Beweise sind zum Beispiel in [32] oder [42] zu finden. Allerdings ist zu beachten, dass sich die existierenden Resultate immer auf die Approximation bezüglich der klassischen Sobolevräume H_p^n beziehen. Abschätzungen der hier gewünschten Form (2.11) sind bisher nicht bekannt. Auch die Abhängigkeit der Konstanten der Fehlerabschätzung von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen bleibt bestehen (siehe [33]).

Damit sind zwei der genannten Probleme der TP-Splineapproximation gelöst; ein wesentlicher Punkt kann allerdings nicht behoben werden.

Es sollte an dieser Stelle auch erwähnt werden, dass sowohl durch das Normieren und Entfernen instabiler B-Splines als auch durch das Erweitern die Eigenschaft verloren geht, dass die Räume bezüglich Verfeinerungen des Gitters ineinander geschachtelt sind. Diese Eigenschaft ist jedoch beispielsweise bei der Verwendung von Multigrid-Methoden von großem Nutzen und sollte daher, wenn möglich, erhalten bleiben.

3 Splineapproximation nach Fortsetzung

Für rechteckige Gebiete $Q = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ mit Seitenlängenvektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)$, $\delta_i = b_i - a_i > 0$, ist die Konstante in der Fehlerabschätzung aus Theorem 2.31 unabhängig von dem Seitenverhältnis der Gitterzellen. Dieser Sachverhalt soll ausgenutzt werden, um auch für allgemeinere Gebiete Ω eine von diesem Seitenverhältnis unabhängige Fehlerabschätzung zu bestimmen.

Gegeben sei also eine Funktion $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ und der zugehörige approximierende Spline sei $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$. Um eine Schranke für $\|f - s\|_{p, \Omega}$ zu bestimmen, wird folgendermaßen vorgegangen:

1. Bestimmung der Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, für die ein Fortsetzungsoperator $F : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ mit $F|_{\Omega} = f$ existiert.
2. Abschätzung des Fehlers $\|F(f) - S\|_{p, \mathbb{R}^d} \leq C|F(f)|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)}$ für $S \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ mit $s = S|_{\Omega}$.
3. Schließlich ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\|f - s\|_{p, \Omega} \leq \|F(f) - S\|_{p, \mathbb{R}^d} \leq C|F(f)|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} \leq C'|f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}.$$

Dies gilt auch, falls statt \mathbb{R}^d ein Rechteck Q betrachtet wird, welches Ω überdeckt, das heißt, für das $\Omega \subset Q$ gilt.

Die entscheidende Frage ist, für welche Gebiete Ω Fortsetzungen aus den anisotropen seminormierten Sobolevräume existieren.

3.1 Isotroper Fall

Zunächst soll der isotrope Fall betrachtet werden, das heißt $\mathbf{n} := (n, \dots, n)$. Fortsetzungen für anisotrope Sobolevräume mit $\mathbf{n} = (n, \dots, n)$ wurden bereits

ausführlich untersucht. Unter anderem haben sich Burenkov [14]-[17] und Besov [2] mit diesem Thema beschäftigt. Bevor dies allerdings näher erläutert wird, werden zunächst die Gebiete definiert, welche im Fokus dieses Abschnitts stehen.

3.1.1 Gebiete

Die nun definierte Klasse an Gebieten entspricht den Lipschitzgraph Gebieten. Da in dieser Arbeit auf einige Details der Definition eingegangen wird, soll hier eine spezielle Notation eingeführt werden.

Definition 3.1 (Burenkov [15]). *Der Rand $\partial\Omega$ eines offenen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gehört zu der Klasse Lip 1 ($\partial\Omega \in \text{Lip } 1$) mit den Parametern s , η und L , wenn eine endliche Sammlung offener Rechteck-Parallelepipede*

$$V_i = \{-\infty \leq a_{ij} < x_j < b_{ij} \leq +\infty, j = 1, \dots, d\},$$

$i = 1, \dots, s$, existiert, so dass gilt:

1. *Falls $x \in \partial\Omega$, dann ist die Kugel mit Radius ϵ und Zentrum im Punkt x Teilmenge von einem V_i ;*
2. *Falls $V_i \cap V_k \cap \Omega = \emptyset$, dann $V_i \cap V_k = \emptyset$;*
3. *Die Mengen $\Omega \cap V_i$ sind - bis auf Permutation der Koordinaten, abhängig von i - von der Gestalt*

$$\Omega \cap V_i = \{a_{id} < x_d < \varphi_i(\bar{x}), \bar{x} \in V_i^*\}$$

oder

$$\Omega \cap V_i = \{\varphi_i(\bar{x}) < x_d < b_{id}, \bar{x} \in V_i^*\},$$

wobei $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$, $V_i^ = \{a_{ij} < x_j < b_{ij}, j = 1, \dots, d-1\}$ und $\varphi_i : V_i^* \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit*

$$|\varphi_i(\bar{x}) - \varphi_i(\bar{y})| \leq L|\bar{x} - \bar{y}|, \quad \bar{x}, \bar{y} \in V_i^*$$

ist und

$$a_{id} + \eta < \varphi_i(\bar{x}) < b_{id} - \eta, \quad \bar{x} \in V_i^*$$

erfüllt ist.

Für Lipschitzgraph Gebiete existieren verschiedene Definitionen. Einen wesentlichen Unterschied macht hierbei die Gestalt der Mengen $\Omega \cap V_i$ aus. Definition 3.1

erlaubt nur Ränder $\partial\Omega|_{V_i}$, welche bezüglich einer Koordinatenachse durch den Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellbar sind. Zusammenhängende Gebiete Ω mit $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$ können durch eine endliche Vereinigung von Gebieten dargestellt werden, welche bezüglich einer Kugel sternförmig sind ([31]). Allerdings ist nicht jedes zusammenhängende Gebiet, welches durch eine solche endliche Vereinigung darstellbar ist, ein Gebiet mit Rand der Klasse Lip 1. In Abbildung 3.1 sind Beispiele von Gebieten veranschaulicht, die nicht zu dieser Menge gehören.

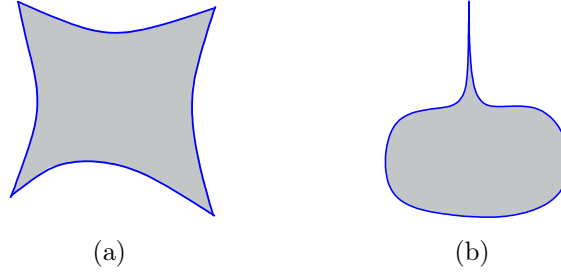


Abbildung 3.1: Beispiele von Gebieten mit $\partial\Omega \notin \text{Lip } 1$

3.1.2 Fortsetzung

Für Gebiete mit Rand der Klasse Lip 1 stimmt W_p^n für $1 < p < \infty$ mit dem wohlbekannten Sobolevraum H_p^n mit Norm

$$\|f\|_{H_p^n} := \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha f\|_p$$

überein und die Normen sind äquivalent. Nach Bemerkung 2.4 gilt $W_p^n \subseteq H_p^n$. Andererseits gilt

$$\sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha f\|_p \geq \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=n} \|D^\alpha f\|_p \geq \|f\|_p + \sum_{i=1}^d \|\partial_i^n f\|_p.$$

Die Fortsetzung dieser beiden Räume wird für $1 \leq p \leq \infty$ zum Beispiel sehr ausführlich von Burenkov [16] untersucht. Eine Zusammenfassung seiner Hauptresultate hierzu sind in [14] zu finden. In dem folgenden Satz wird mit ϱ die Metrik (2.2) mit $n_i = n$ für alle $i = 1, \dots, d$ bezeichnet.

Satz 3.2. *Sei Ω ein Gebiet mit Rand der Klasse Lip 1 und $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert ein beschränkter linearer Fortsetzungsoperator $F : W_p^n(\Omega) \rightarrow W_p^n(\mathbb{R}^d)$, so dass $(Ff) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$ und für $\max_i \alpha_i > n$ gilt*

$$\|\varrho(\cdot)^{|\alpha|-n} D^\alpha (Ff)\|_{p, \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}} \leq c \|f\|_{W_p^n(\Omega)}.$$

Wie schon erwähnt, sind vor allem Fortsetzungen in den seminormierten Sobolevräumen interessant. Für diese Räume konnte Besov [2] eine Fortsetzung auf den ganzen \mathbb{R}^d konstruieren. Allerdings nur für Gebiete, welche die *schwache unendliche \mathbf{n} -Horn-Bedingung* erfüllen. Diese Bedingung ist jedoch zu stark einschränkend und daher wird hier nur darauf hingewiesen.

Die am Ende von Abschnitt 2.1 erwähnten Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Sobolevräumen lassen allerdings schon vermuten, dass eine Fortsetzung auch für allgemeinere Gebiete möglich sein sollte. Burenkov [16] (beziehungsweise [17]) konnte dies auch für Gebiete beweisen, deren Ränder zu der Klasse $\text{Lip } 1$ (siehe Definition 3.1) gehören. Für solche Gebiete kann ein Fortsetzungsoperator konstruiert werden, falls Ω zusammenhängend und beschränkt ist. Es gilt:

Satz 3.3. *Sei $1 \leq p \leq \infty$, Ω zusammenhängend und beschränkt mit $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$, dann existiert ein beschränkter linearer Fortsetzungsoperator*

$$F : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d).$$

Für die hier vorliegenden Gebiete existiert nach Besov, Il'in und Nikol'skiĭ [4] für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ die Integralrepräsentation (2.1). Hiermit (siehe Burenkov [17, S.92/93]) kann ein Projektionsoperator $\pi : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ definiert werden, so dass $\text{Id} - \pi : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow L_p$. Ist $S : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ der beschränkte Fortsetzungsoperator nach Satz 3.2, so kann für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ ein Operator

$$F := \pi + S(\text{Id} - \pi)$$

von $w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ nach $w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ gewählt werden. Mit dem folgenden Satz ist somit Satz 3.3 gültig.

Satz 3.4. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Weiter sei Ω beschränkt und es existiere ein beschränkter Fortsetzungsoperator $S : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$. Für die Existenz eines beschränkten Fortsetzungsoperators $F : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ ist es notwendig und hinreichend, dass ein Projektionsoperator $\pi : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ existiert, für den gilt:*

$$\|f - \pi\|_{p,\Omega} \leq c |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}.$$

Hierbei ist c unabhängig von f .

Die Notwendigkeit des Zusammenhangs von Ω ist leicht an dem in Abschnitt 3.2.2 aufgezeigten Beispiel 3.20 ersichtlich.

3.1.3 Approximation

Nun sollen diese Fortsetzungen ausgenutzt werden, um den Fehler der Splineapproximation auf Ω abzuschätzen. Hierfür wird das folgende Resultat auf dem gesamten \mathbb{R}^d benötigt.

Satz 3.5. Sei $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ der Raum der TP-Splines der Ordnung $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Dann gilt für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)} \|f - s\|_{p, \mathbb{R}^d} \leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^n f\|_{p, \mathbb{R}^d} h_i^n,$$

wobei $h_i := \max_{j \in \mathbb{Z}} |t_i^{(j)} - t_i^{(j+1)}|$ und C nur von \mathbf{n} und p abhängt.

Beweis:

Der Beweis wird für $p < \infty$ geführt, kann aber analog für $p = \infty$ gezeigt werden. Im folgenden Beweis sei $Z_{\mathbf{j}} = \prod_{i=1}^d [t_i^{(j_i)}, t_i^{(j_i+1)}]$ die \mathbf{j} -te-Gitterzelle und weiter

$$\bar{Z}_{\mathbf{j}} := \prod_{i=1}^d [t_i^{(j_i-n_i+1)}, t_i^{(j_i+n_i)}].$$

Sei $P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ beliebig, dann gilt: $f - Qf = f - P + P - Qf = f - P + Q(P - f)$. Hierbei sei Q ein Quasiinterpolant, welcher mit Satz 2.27 und Anwendung eines passenden Glättungsoperators gebildet werden kann. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|f - Qf\|_{p, Z_{\mathbf{j}}} &\leq \|f - P\|_{p, Z_{\mathbf{j}}} + C_Q \|f - P\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}} \\ &\leq (1 + C_Q) \|f - P\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}}. \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.14 existiert ein Polynom P mit

$$\|f - P\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}} \leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^n f\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}} |\bar{Z}_{\mathbf{j}}|_i^n.$$

Weiter gilt, dass $|\bar{Z}_{\mathbf{j}}|_i \leq (2n - 1)h_i$ ist. Somit ergibt sich

$$\|f - Qf\|_{p, Z_{\mathbf{j}}} \leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^n f\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}} h_i^n.$$

In endlich-dimensionalen Vektorräumen sind Normen äquivalent, das heißt, für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$c_p \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \leq C_p \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Da die Rechtecke $\bar{Z}_{\mathbf{j}}$ sich $(2n - 1)^d =: m$ -mal überlappen, ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - Qf\|_{p, \mathbb{R}^d}^p &\leq \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \|f - Qf\|_{p, Z_{\mathbf{j}}}^p \\ &\leq C^p C_p^p \sum_{i=1}^d \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d} \|\partial_i^n f\|_{p, \bar{Z}_{\mathbf{j}}}^p h_i^{pn} \\ &\leq m C^p C_p^p \sum_{i=1}^d (\|\partial_i^n f\|_{p, \mathbb{R}^d} h_i^n)^p. \end{aligned}$$

Die Ungleichung aus dem Satz ist bewiesen, wenn die p -te Wurzel gezogen und erneut die Äquivalenz der Normen ausgenutzt wird. \square

Bei genauerer Betrachtung dieses Beweises wird klar, dass Satz 3.5 auch in dem anisotropen Fall mit $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d)$ gültig bleibt. In der Fehlerabschätzung muss lediglich n durch n_i ersetzt werden.

Falls Funktionen $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ mit $\mathbf{n} := (n, \dots, n)$ approximiert werden sollen, so kann mit Hilfe von Satz 3.3 folgendes Ergebnis erzielt werden.

Satz 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, zusammenhängend und $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$. Weiter sei $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ ein TP-Spliner Raum der Ordnung $\mathbf{n} = (n, \dots, n) \in \mathbb{N}^d$. Dann gilt für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)} \|f - s\|_{p,\Omega} \leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \sum_{i=1}^d h_i^n$$

mit $h_i = \max_{j \in \mathbb{Z}} |t_i^{(j)} - t_i^{(j+1)}|$ und C abhängig von \mathbf{n} , p und Ω .

Beweis:

Nach Satz 3.3 existiert $F : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$. Somit gilt für $\tilde{s} \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ mit $\tilde{s}|_{\Omega} = s$

$$\|f - s\|_{p,\Omega} = \|Ff - \tilde{s}\|_{p,\Omega} \leq \|Ff - \tilde{s}\|_{p,\mathbb{R}^d}.$$

Nun lässt sich auf den letzten Teil Satz 3.5 anwenden und es folgt

$$\|Ff - \tilde{s}\|_{p,\mathbb{R}^d} \leq c \sum_{i=1}^d \|\partial_i^n Ff\|_{p,\mathbb{R}^d} h_i^n \leq c_1 |Ff|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i=1}^d h_i^n \leq c_2 |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \sum_{i=1}^d h_i^n.$$

\square

3.2 Anisotroper Fall

Die Umsetzung der Idee, welche diesem Kapitel zugrunde liegt, ist im isotropen Fall relativ einfach und direkt möglich. Im anisotropen Fall, das heißt für $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d)$, ist dies nicht der Fall. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass bisher kein hinreichend allgemeines Resultat für die Fortsetzung von den seminormierten Sobolevräumen $w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ nach $w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ bekannt ist. Nicht hinreichend allgemein bezieht sich hierbei darauf, dass entweder die Klasse der Gebiete

enorm eingeschränkt ist (siehe Besov [2]) oder nur in eine gewisse Umgebung von Ω fortgesetzt werden kann (siehe Faĭn [30]). Doch auch hier ist die Abschätzung des Fehlers der Splineapproximation auf Ω durch den Fehler auf \mathbb{R}^d möglich. Hierzu werden vorab verschiedene Gebietsdefinitionen gegeben.

3.2.1 Gebiete

Die Fortsetzung auf anisotropen Räumen wurde vor allem von Faĭn und Burakov (siehe [18], [29] oder auch [30]) untersucht. Faĭn [30] verallgemeinert die Definition und auch die Fortsetzungsmethode, welche Jones [38] für $f \in H_p^n(\Omega)$ über sogenannten (ε, δ) -Gebieten verwendet. Für $\varepsilon, \delta > 0$ sind Lipschitzgraph Gebiete in der Klasse der (ε, δ) -Gebiete enthalten. Sogar das Schneeflocken-Gebiet ist für ein $\varepsilon > 0$ ein (ε, ∞) -Gebiet. Das heißt, dass der Rand solcher (ε, δ) -Gebiete in starkem Maß nicht rektifizierbar sein kann. Damit ist dies eine sehr große Klasse an Gebieten und es scheint nur naheliegend, die Ideen auf die anisotropen Sobolevräume zu übertragen.

Bei der Konstruktion des Fortsetzungsoperators bildet Faĭn [30] eine Zerlegung von Ω beziehungsweise $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ in bestimmte Parallelepipede. Die Menge der Parallelepipede über Ω wird mit W_1 und die über $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ mit W_2 bezeichnet. Der Operator $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ wird durch

$$Ff := \sum_{\nu} p_{\nu} \varphi_{\nu}^k \quad (3.1)$$

definiert, wobei die Summe über die Indexmenge der Parallelepipede aus W_2 läuft. Die Funktionen $\varphi_{\nu}^k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ haben kompakte Träger in $\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$, deren Lage und Größe von den Parallelepipeden aus W_2 abhängig ist. Außerdem bilden die Funktionen φ_{ν}^k auf \mathbb{R}^d eine Partition der Eins. Bei der Bildung der Partition der Eins passt Faĭn hierbei das Verfahren von Jones [38] beziehungsweise von Whitney [58] auf den anisotropen Fall an.

Die Funktion $p_{\nu} \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ entspricht dem polynomialen Anteil der Integralrepräsentation (2.1) über einem Gebiet, welches sternförmig bezüglich eines Parallelepipeds in Ω ist.

Faĭn definiert eine Klasse an Gebieten, für die diese Konstruktion des Operators (3.1) möglich ist. Im Folgenden wird die in Kapitel 2.1 definierte Metrik ϱ (siehe (2.2)) zugrunde gelegt. Mit $\varrho(x, \partial\Omega)$ wird der Abstand von $x \in \mathbb{R}^d$ zu $\partial\Omega$ bezeichnet.

Definition 3.7. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$. Ein Gebiet Ω liegt in $B_{\varepsilon, \delta}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}$ mit $\varrho(x, \partial\Omega) < \delta$ existiert ein Punkt $y \in \Omega$, so dass

$$\varrho(y, \partial\Omega) = \varrho(x, \partial\Omega) \quad \text{und} \quad \varrho(x, y) \leq \frac{\varrho(x, \partial\Omega)}{\varepsilon}.$$

2. Für beliebige $x, y \in \Omega$ mit $\varrho(x, y) < \delta$ existiert ein Bogen $L \subset \Omega$, der x und y so verbindet, dass

$$\text{diam } L \leq \frac{\varrho(x, y)}{\varepsilon}$$

und für $z \in L$

$$\varrho(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \min \{ \varrho(x, \partial\Omega), \varrho(y, \partial\Omega) \}$$

gilt.

Ferner geben Burenkov und Faĭn [18] eine Klasse an Gebieten an, welche eine Verallgemeinerung der Gebiete mit Rand der Klasse Lip 1 (siehe Definition 3.1) darstellt.

Definition 3.8. Sei $x^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$ und

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i < \varphi(x^{(i)})\},$$

wobei $\varphi(x^{(i)})$ folgender Bedingung genüge:

$$|\varphi(x^{(i)}) - \varphi(y^{(i)})|^{n_i} \leq M \sum_{k \neq i} |x_k - y_k|^{n_k}$$

mit $x^{(i)}, y^{(i)} \in \mathbb{R}^{d-1}$. Solche Gebiete werden spezielle Gebiete der Klasse $\hat{A}(\mathbf{n})$ genannt.

Definition 3.9. Der Rand eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gehört zu der Klasse $\hat{A}(\mathbf{n})$ ($\partial\Omega \in \hat{A}(\mathbf{n})$), falls $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $M > 0$ und eine endliche oder abzählbare Familie offener Mengen $\{V_j\}$ mit $j = 1, \dots, s$, $s \in \mathbb{N}$, existieren, so dass gilt:

1. falls $x \in \partial\Omega$, dann ist die Kugel um x mit Radius ε in einem der V_j enthalten;
2. kein Punkt in \mathbb{R}^d ist in mehr als N offenen Mengen V_j enthalten;
3. für beliebiges j existiert ein spezielles Gebiet Ω_j der Klasse $\hat{A}(\mathbf{n})$ mit Konstanten M , so dass $V_j \cap \Omega = \Omega_j \cap \Omega$.

Zusammenhänge zwischen den Gebieten

Im isotropen Fall entsprechen die Gebiete nach Definition 3.9 den Gebieten aus Lip 1, das heißt

$$\hat{A}(n, \dots, n) \equiv \text{Lip } 1.$$

Falls $\partial\Omega \in \hat{A}(\mathbf{n})$, so genügt Ω außerdem der starken \mathbf{n} -Horn-Bedingung.

Faĭn [30] beweist einige wichtige Zusammenhänge zwischen den $B_{\varepsilon,\delta}$ -Gebieten und Gebieten, welche eine \mathbf{n} -Horn-Bedingung (siehe Definitionen 2.7 - 2.9) erfüllen oder aus $\hat{A}(\mathbf{n})$ sind. Hier werden nun zwei davon genannt.

Lemma 3.10. *Falls eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der starken \mathbf{n} -Horn-Bedingung genügt, so existieren $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_H, a_i, \mathbf{n})$ und $\delta = \delta(\varepsilon_H, \delta, h, \mathbf{n})$, so dass $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$. Hierbei bezeichnet ε_H die Öffnung der \mathbf{n} -Hörner (siehe Definition 2.6).*

Lemma 3.11. *Falls $\Omega \in \hat{A}(\mathbf{n})$, dann existieren $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$, so dass $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$.*

Für das nächste Lemma wird eine weitere Variante der \mathbf{n} -Horn-Gebiete benötigt (siehe Faĭn [30]).

Definition 3.12. *Ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ genügt der abgeschwächten \mathbf{n} -Horn Bedingung ($\Omega \in \underline{\underline{A}}(\mathbf{n}, h)$), falls eine Familie von Punkten $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in \overline{\Omega}$, und von \mathbf{n} -Hörnern $V_\alpha(\mathbf{n}, h)$ mit Koeffizienten a_i , ε und h , welche bezüglich α gleichmäßig beschränkt sind, existiert, so dass*

$$\Omega = \bigcup_{\alpha} (x_\alpha + V_\alpha(\mathbf{n}, h)).$$

Diese Bedingung ist schwächer als die schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung. Außerdem ist für diese Klasse das erste der $B_{\varepsilon,\delta}$ -Kriterien aus Definition 3.7 erfüllt. Allerdings gilt das nicht für das zweite Kriterium, das heißt (im Allgemeinen):

$$\Omega \in \underline{\underline{A}}(\mathbf{n}, h) \not\Rightarrow \Omega \in B_{\varepsilon,\delta}.$$

Lemma 3.13. *Falls $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der abgeschwächten \mathbf{n} -Horn-Bedingung und dem zweiten Kriterium in Definition 3.7 mit einem $\varepsilon_1 > 0$ genügt, dann existieren $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$ (abhängig von ε_1 und den Parametern des \mathbf{n} -Horns), so dass $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$.*

Es werden nun einige Beispiele für $B_{\varepsilon,\delta}$ -Gebiete gegeben, bevor die Fortsetzungen von $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ beziehungsweise $f \in w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ für $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$ untersucht werden.

Beispiel/Gegenbeispiel 3.14. Sei $d = 2$ und $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ und Q die Kreisscheibe aus Beispiel 2.11. Fařn [30] betrachtet diese auch für $B_{\varepsilon, \delta}$ -Gebiete und hier gilt

$$Q \in B_{1/2, 1/2}, \quad \text{für } \frac{1}{2}n_1 \leq n_2 \leq 2n_1.$$

■

Beispiel 3.15. Ein Beispiel für ein Gebiet, welches für beliebige \mathbf{n} zu $\overline{A}(\mathbf{n})$ und somit nach Lemma 3.10 auch zu $B_{\varepsilon, \delta}$ gehört, ist

$$R = \{(x_1, x_2) : |x_1| < a, |x_2| < b \text{ mit } a > 0, b > 0\}.$$

■

Beispiel 3.16 (für Lemma 3.13). Sei Ω das \mathbf{n} -Horn $V(\mathbf{n}, h)$ mit beliebigen Koeffizienten a_i , $i = 1, \dots, d$, und $\varepsilon > 0$. Das Gebiet Ω genügt somit der abgeschwächten \mathbf{n} -Horn-Bedingung. Auch das zweite Kriterium aus Definition 3.7 ist für

$$\varepsilon_1 = \min_{1 \leq k \leq M} \frac{\varepsilon}{4} \left(\sum_{i=1}^d |a_i(k)|^{n_i/A} + 1 \right)^{-1}$$

mit $A = \max_{1 \leq j \leq d} n_j$ erfüllt. Dies ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 3.10 (siehe [30]). Damit existieren nach Lemma 3.13 $0 < \varepsilon_2 < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$, so dass $V(\mathbf{n}, h) \in B_{\varepsilon_2, \delta}$. ■

3.2.2 Fortsetzung

Die Fortsetzung im anisotropen Fall ist kaum untersucht. Die hier interessanten Resultate liefert Fařn [30]. Zum einen beweist er die Existenz eines Fortsetzungsoperators in den gesamten \mathbb{R}^d auf den normierten anisotropen Sobolevräumen und zum anderen die Existenz eines Fortsetzungsoperators in eine Umgebung von Ω auf den seminormierten anisotropen Sobolevräumen.

Satz 3.17 (Fařn [30]). Sei $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \in B_{\varepsilon, \delta}$. Dann existiert ein beschränkter linearer Fortsetzungsoperator

$$F : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d).$$

Für $\beta_i > n_i$ sei $\mu_i := \max_{1 \leq k \leq d} n_k(\beta_i/n_i - 1)$. Dann gilt $(Ff) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega})$ und

$$\|\varrho(\cdot, \partial\Omega)^{\mu_i} D^{\beta_i}(Ff)\|_{p, \mathbb{R}^d \setminus \bar{\Omega}} \leq C \|f\|_{W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}$$

mit einer von f unabhängigen Konstanten C .

Besov und Il'in [3] beweisen die Existenz eines solchen Fortsetzungsoperators für den Fall, dass Ω eine starke \mathbf{n} -Horn Bedingung erfüllt. Dies folgt allerdings auch aus Lemma 3.10.

Leider existiert für seminormierte anisotrope Sobolevräume kein allgemein gültiger Satz für die Fortsetzung in den ganzen \mathbb{R}^d . Besov [2] zeigt, dass eine solche Fortsetzung für unbeschränkte Gebiete möglich ist, welche eine schwache unendliche \mathbf{n} -Horn Bedingung erfüllen. Diese Klasse ist allerdings zu eingeschränkt. Für Gebiete in $B_{\varepsilon,\delta}$ hat Fařn [30] untersucht, inwiefern eine Fortsetzung möglich ist. Sei $\Omega^\lambda := \bigcup_{x \in \Omega} B(x, \lambda)$ für $0 < \lambda \leq \infty$, wobei $B(x, \lambda)$ eine offene Kugel in der Metrik (2.2) mit Radius λ um den Punkt x bezeichne.

Satz 3.18. *Falls $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$ für $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$, so existiert für $1 \leq p \leq \infty$ ein beschränkter linearer Fortsetzungsoperator*

$$F : w_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\Omega^{\varepsilon\delta/8}).$$

Für $\beta_i > n_i$ sei $\mu_i := \max_{1 \leq k \leq d} n_k (\beta_i/n_i - 1)$. Dann gilt $(Ff) \in C^\infty(\Omega^{\varepsilon\delta/8} \setminus \bar{\Omega})$ und für ein beliebiges $0 < \lambda \leq \varepsilon\delta/8$ gilt

$$\|\varrho(\cdot, \partial\Omega)^{\mu_i} D^{\beta_i} (Ff)\|_{p, \Omega^\lambda \setminus \bar{\Omega}} \leq C \|f\|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}.$$

Auch hier ist C wieder unabhängig von f .

Wie Beispiel 3.20 zeigt, ist hier die Fortsetzung in den ganzen \mathbb{R}^d nicht möglich.

Beispiele

Beispiel 3.19. In Beispiel/Gegenbeispiel 3.14 wird gezeigt, dass die Einheitskreisscheibe Q nur dann zu $B_{\varepsilon,\delta}$ gehört, wenn $n_2/2 \leq n_1 \leq 2n_2$. Fařn [30] betont sogar, dass eine Fortsetzung von Funktionen aus $W_p^{\mathbf{n}}(Q)$ beziehungsweise $w_p^{\mathbf{n}}(Q)$ ohne Verlust an Differenzierbarkeitsordnung unmöglich ist, falls $n_2/2 \leq n_1 \leq 2n_2$ nicht erfüllt ist. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass in Satz 3.18 die Fortsetzung auf ein größeres Gebiet im Allgemeinen nicht möglich ist.

Beispiel 3.20 (Fařn [30]). Sei $d = 2$. Gegeben sei das Gebiet $\Omega = Q_1 \cup Q_2$, wobei Q_1 und Q_2 zwei offene Kreisscheiben mit Radien $r_i < \delta$, $i = 1, 2$ seien und einen Abstand δ haben. Auf diesem Gebiet Ω sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in Q_1 \\ 1 & \text{für } x \in Q_2 \end{cases}$$

definiert.

Klar ist, dass $f \in w_p^{1,1}(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$, denn $\|\partial_1^1 f\|_{p,\Omega} + \|\partial_2^1 f\|_{p,\Omega} = 0$. Weiter ist $\Omega \in B_{1/2,\delta}$. Daher folgt mit Satz 3.18, dass ein beschränkter Fortsetzungsoperator

$$F : w_p^{1,1}(\Omega) \rightarrow w_p^{1,1}(\Omega^{\delta/16})$$

existiert. Weiter muss $|Ff|_{w_p^{1,1}(\Omega^{\delta/16})} \leq c \cdot |f|_{w_p^{1,1}(\Omega)} = 0$ erfüllt sein.

Für jeden beliebigen Punkt $x \in \Omega^{\delta/16}$ gibt es eine zusammenhängende Umgebung $U_x \subset \Omega^{\delta/16}$, auf der $Ff \in L_p(U_x)$ ist (siehe Bemerkung 2.4). Mit Satz 2.13 folgt, dass ein Polynom $P \in \mathbb{P}_{1,1}$ mit

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{1,1}} \|Ff - P\|_{p,U_x} \leq C |Ff|_{w_p^{1,1}(U_x)} = 0$$

existiert. Nach Satz 3.18 muss $Ff \in C^\infty(\Omega^{\delta/16} \setminus \bar{\Omega})$ erfüllt sein. Die Funktion Ff ist somit auf U_x konstant. Da weiter $Ff|_\Omega = f$ ist, muss die Fortsetzungsfunktion von folgender Form sein:

$$Ff(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in Q_1^{\delta/16} \\ 1 & \text{für } x \in Q_2^{\delta/16} \end{cases} . \quad (3.2)$$

Angenommen, es existiert ein Fortsetzungsoperator auf das Gebiet $\Omega^{\epsilon\delta} = \Omega^{\delta/2}$. Dann gibt es einen Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ mit $\varrho(y, Q_1) = \varrho(y, Q_2) = \delta/2$. Dies steht allerdings im Widerspruch zu der Fortsetzungsfunktion (3.2). ■

Das Beispiel zeigt auch, dass der Zusammenhang des Gebietes in Satz 3.3 notwendig ist.

3.2.3 Approximation

Die Fortsetzungssätze existieren für seminormierte anisotrope Sobolevräume mit $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_d)$ nicht in der gewünschten Form. Allerdings gilt mit Satz 3.17, dass ein Fortsetzungsoperator von Gebieten $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}$ in den gesamten \mathbb{R}^d für die normierten anisotropen Sobolevräume existiert. Dieses Ergebnis kann ausgenutzt werden, um ein zu dem isotropen Fall (siehe Satz 3.6) analoges Resultat zu beweisen. Dafür werden vorab einige zusätzliche Sätze benötigt.

Für Gebiete, welche eine schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung erfüllen, ist folgendes Einbettungstheorem gültig.

Satz 3.21. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, das einer schwachen \mathbf{n} -Horn Bedingung genügt. Dann gilt für $1 \leq p < \infty$ und alle $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, dass die Einbettung*

$$W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$$

kompakt ist.

Einen Beweis hierzu kann zum Beispiel in dem Buch von Besov, Il'in und Nikol'skiĭ [4] nachgelesen werden. Unter Ausnutzung von Satz 3.21 kann die Gültigkeit des folgenden Satzes über einen Widerspruchsbeweis analog zu dem klassischen Bramble-Hilbert Lemma (siehe [21] oder [27]) gezeigt werden.

Satz 3.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, welches die schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung erfüllt. Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ gilt*

$$\inf_{P \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}} \|f - P\|_{p,\Omega} \leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)},$$

wobei C von p , \mathbf{n} und Ω abhängig ist.

Aus Lemma 3.13 folgt, dass Gebiete, welche die schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung und zusätzlich das zweite Kriterium aus Definition 3.7 erfüllen, zu den $B_{\varepsilon,\delta}$ -Gebieten gehören.

Definition 3.23. *Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $0 < \delta \leq \infty$. Ein Gebiet Ω liegt in $B_{\varepsilon,\delta}^*$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. Ω erfüllt die schwache \mathbf{n} -Horn Bedingung.
2. Für beliebige $x, y \in \Omega$ mit $\varrho(x, y) < \delta$ existiert ein Bogen $L \subset \Omega$, der x und y so verbindet, dass

$$\text{diam } L \leq \frac{\varrho(x, y)}{\varepsilon}$$

und für $z \in L$

$$\varrho(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \min \{ \varrho(x, \partial\Omega), \varrho(y, \partial\Omega) \}$$

gilt.

Da nach Satz 3.17 für $\Omega \in B_{\varepsilon,\delta}^*$ ein Fortsetzungsoperator von $W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ nach $W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$ existiert, kann unter Ausnutzung von Satz 3.22 der nun folgende Satz bewiesen werden.

Satz 3.24. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet in $B_{\varepsilon,\delta}^*$. Dann existiert für $1 \leq p < \infty$ ein Fortsetzungsoperator $\tilde{F} : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ gilt*

$$|\tilde{F}f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} \leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)},$$

wobei C von p , \mathbf{n} und Ω abhängig ist.

Beweis:

Nach Satz 3.22 existiert ein Projektionsoperator $\pi : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$, für den gilt

$$\|f - \pi f\|_{p,\Omega} \leq C_\pi |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}.$$

Nach Satz 3.17 existiert ein Fortsetzungsoperator $F : W_p^{\mathbf{n}}(\Omega) \rightarrow W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$. Sei $\tilde{F} := \pi + F(Id - \pi)$. Da $\partial_i^{n_i} \pi f = 0$ für $i = 1, \dots, d$, folgt

$$\begin{aligned} |\tilde{F}f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} &\leq |\pi f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} + \|F(f - \pi f)\|_{W_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_F \left(\|f - \pi f\|_{p,\Omega} + \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i}(f - \pi f)\|_{p,\Omega} \right) \\ &\leq C_F \left(C_\pi |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} + \sum_{i=1}^d (\|\partial_i^{n_i} f\|_{p,\Omega} + \|\partial_i^{n_i} \pi f\|_{p,\Omega}) \right) \\ &\leq C_F(C_\pi + 1) |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Letztendlich führen unter anderem die Sätze 3.21-3.24 zu dem gesuchten Resultat.

Satz 3.25. *Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ in $B_{\varepsilon,\delta}^*$ und der Tensorprodukt-Spliner Raum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ der Ordnung $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Dann gilt für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,*

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)} \|f - s\|_{p,\Omega} \leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \sum_{i=1}^d h_i^{n_i}$$

mit $h_i := \max_{j \in \mathbb{Z}} |t_i^{(j)} - t_i^{(j+1)}|$ und C nur abhängig von n , p und Ω .

Beweis:

Wie in Satz 3.24 bewiesen, existiert für $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ eine Fortsetzung $\tilde{F}f$ nach $w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)$. Im Beweis wurde sogar gezeigt, dass $\tilde{F}f = \pi f + F(f - \pi f)$ für $\pi f \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$. Satz 3.5 ist auch für anisotrope $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ gültig. Daher existiert ein Spline

$s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$, so dass

$$\begin{aligned}
\|F(f - \pi f) - s\|_{p, \mathbb{R}^d} &\leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} F(f - \pi f)\|_{p, \mathbb{R}^d} h_i^{n_i} \\
&\leq C \sum_{i=1}^d \|\partial_i^{n_i} \tilde{F} f\|_{p, \mathbb{R}^d} h_i^{n_i} \\
&\leq d C |\tilde{F} f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\mathbb{R}^d)} \sum_{i=1}^d h_i^{n_i} \\
&\leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \sum_{i=1}^d h_i^{n_i}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Mit $\tilde{s} := s + \pi f \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\|f - \tilde{s}\|_{p, \Omega} &= \|\tilde{F} f - \tilde{s}\|_{p, \Omega} \\
&\leq \|\pi f + F(f - \pi f) - s - \pi f\|_{p, \mathbb{R}^d} \\
&= \|F(f - \pi f) - s\|_{p, \mathbb{R}^d}
\end{aligned}$$

und somit die gewünschte Abschätzung. \square

3.3 Fazit

Sowohl im isotropen als auch im anisotropen Fall ist es möglich, für bestimmte Gebiete Ω eine Funktion $f \in W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ durch einen Spline $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)$ so zu approximieren, dass für $1 \leq p < \infty$

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T)} \|f - s\|_{p, \Omega} \leq C |f|_{w_p^{\mathbf{n}}(\Omega)} \sum_{i=1}^d h_i^{n_i}$$

gilt. Diese Fehlerabschätzung ist, wie gewünscht, unabhängig von dem Seitenverhältnis der Gitterzellen des Tensorprodukt-Gitters. Allerdings ist es nicht möglich über diesen Weg eine Abschätzung zu erhalten, die der Abschätzung (2.11) komplett entspricht. Um die Fortsetzung ausnutzen zu können, muss das Zusammenspiel zwischen h_i und der Norm der entsprechenden Ableitung $\|\partial_i^{n_i} f\|_{p, \Omega}$ aufgelöst werden (siehe Schritt (3.3) in dem Beweis zu Theorem 3.25). Die Gitterweiten h_i treten somit nicht einzeln mit den zugehörigen Ableitungen in Richtung i auf, sondern in der Form

$$\sum_{i=1}^d h_i^{n_i}.$$

Im isotropen Fall ist die Abschätzung für zusammenhängende und beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$ möglich. Ist die zu approximierende Funktion aus einem anisotropen Sobolevraum mit $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, so kann die Abschätzung über Gebieten $\Omega \in B_{\varepsilon, \delta}^*$ vorgenommen werden. Jedoch hängt die Menge $B_{\varepsilon, \delta}^*$ stark mit der Ordnung \mathbf{n} zusammen. Wie dieser Zusammenhang aussieht, soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 3.26. Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ und $f(x, y) = \frac{x^3}{1+y}$. Dann gilt

1. $f(x, y) \in L_2(\Omega)$.
2. $\partial_x^3 f(x, y) = \frac{6}{1+y}$, $\partial_x^4 f(x, y) = 0$ und $\partial_y^1 f(x, y) = -\frac{x^3}{(1+y)^2}$.

Für die Seminormen folgt somit $|f|_{w_2^{(4,1)}(\Omega)} = \frac{5\pi}{4}$ und $|f|_{w_2^{(3,1)}(\Omega)} = \infty$. Das bedeutet:

$$f \in W_2^{(4,1)}(\Omega), \text{ aber } f \notin W_2^{(3,1)}(\Omega) \quad (3.4)$$

Angenommen es existiert ein Fortsetzungsoperator $F : W_2^{(4,1)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(4,1)}(\mathbb{R}^2)$, dann gilt auch $F \in W_2^{(3,1)}(\mathbb{R}^2)$, da $W_2^{(4,1)}(\mathbb{R}^2) \subset W_2^{(3,1)}(\mathbb{R}^2)$. Das steht allerdings im Widerspruch zu (3.4).

\Rightarrow Es kann kein Fortsetzungsoperator $F : W_2^{(4,1)}(\Omega) \rightarrow W_2^{(4,1)}(\mathbb{R}^2)$ existieren!

■

Das Beispiel zeigt, dass eine Fortsetzung aus einem glatt berandeten Gebiet für Funktionen aus einem anisotropen Sobolevraum ab einem gewissen Grad der Anisotropie nicht mehr möglich ist. Das heißt, je stärker die Anisotropie desto kleiner ist die Klasse der Gebiete, für die eine Fortsetzung existiert.

4 Kondensierte B-Splines

In Kapitel 2.3 wurden einige Varianten der klassischen Splineapproximation samt ihrer Problematiken aufgezeigt. Dazu zählen auch die normierten B-Splines (siehe Abschnitt 2.4), welche in den meisten Fällen eine stabile Basis mit optimaler Approximationsordnung bilden. Einige B-Splines können jedoch durch das Normieren nicht stabilisiert werden. Es wird nun die Methode des Kondensierens vorgestellt, welche selbst diese Problemfälle stabilisiert, ohne dabei einen anderen Nachteil zu erzeugen.

Die Idee des Kondensierens wird anhand des Beispiels 2.35 erläutert. Die Konstellation von Knoten und Gebiet in Abbildung 2.4 scheint keine sinnvolle Wahl zu sein. Die Knotenabstände sind im Verhältnis zu der Größe des Gebietes sehr groß gewählt. Bei dem gegebenen Gebiet und unter Erhalt des Splineraumes wäre die intuitive Wahl der Knoten so, dass zwei auf dem Rand liegen und die restlichen uniform verteilt sind. Im folgenden Beispiel wird nun untersucht, ob die neue Wahl der Knoten zu einer stabilen Basis führt. Abbildung 4.1 zeigt die beschriebene Wahl der Knoten und die zugehörigen B-Splines der Ordnung zwei.

Beispiel 4.1. Für $t \in [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$ gilt für die normierten optimierten (kondensierten) B-Splines \tilde{b}^p

$$\tilde{b}_{-1}^p(t) = 1 - \frac{t - \frac{1}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon}, \quad \tilde{b}_0^p(t) = \frac{t - \frac{1}{2} + \varepsilon}{2\varepsilon}.$$

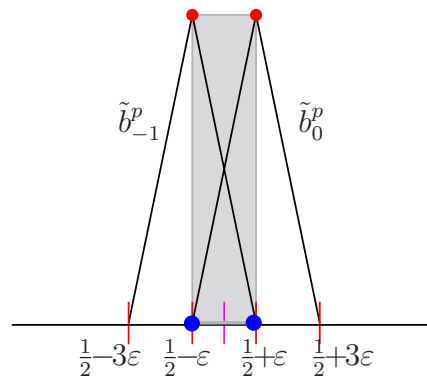


Abbildung 4.1: Optimierung von Beispiel 2.35

Damit diese dieselbe Splinefunktion $s(t) = 1 - 2t$ wie in Beispiel 2.35 erzeugen, müssen die Koeffizienten angepasst werden. Damit gilt

$$F = (2\varepsilon, -2\varepsilon).$$

Es folgt $\|s\|_{\infty, \Omega} = 2\varepsilon = \|F\|_{\infty}$. Das heißt, egal wie klein das Gebiet ist, gilt $c\|F\|_{\infty} \leq \|s\|_{\infty, \Omega} \leq C\|F\|_{\infty}$ mit $c = C = 1$. ■

Jeder einzelne Träger wird bei dem Verfahren des sogenannten *uniformen Kondensierens* so optimiert, dass die Knotenabstände des Trägers möglichst klein sind, der Splineraum über Ω allerdings nicht verändert wird. Hierbei werden die einzelnen B-Splines unabhängig voneinander betrachtet. Die *uniform kondensierten* B-Splines (kurz: ukB-Splines) werden mit \tilde{b} beziehungsweise \tilde{B} gekennzeichnet.

In dem folgenden Abschnitt 4.1 wird das Verfahren für univariate B-Splines untersucht und gezeigt, dass eine stabile Basis entsteht. Dass eine Erweiterung in den bivariaten Fall möglich ist, wird in Abschnitt 4.2 dargestellt. Hier wird schließlich auch bewiesen, dass die Approximation mit den ukB-Splines von maximaler Approximationsordnung ist. Im letzten Abschnitt werden einige Verallgemeinerungen präsentiert.

4.1 Univariate Splines

Die Probleme, welche entstehen, wenn nicht über dem gesamten \mathbb{R} approximiert wird, sind weitestgehend durch eine geeignete Knotenwahl zu lösen. Grundsätzlich müsste somit das uniforme Kondensieren hier nicht angewandt und näher betrachtet werden. Aufgrund der TP-Struktur, welche hier im multivariaten Fall vorausgesetzt wird (siehe Abschnitt 2.3.2), macht es Sinn, die Idee des uniformen Kondensierens zuerst im univariaten Fall zu analysieren. Hier wird die Methode zuerst für Intervalle und schließlich für die Vereinigung disjunkter Intervalle untersucht.

4.1.1 Konstruktion

Gegeben sei ein Intervall $\Omega := (r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$. Weiter sei eine Anfangsknotenfolge $T = \{t_i\}_{i=1}^{m+n}$ mit uniformem Abstand h gegeben, so dass $\Omega \subset D(T)$. Die für Ω relevanten B-Splines werden mit $b_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, bezeichnet. Sie seien von der Ordnung n mit Träger $\text{supp } b_i = [t_i, t_{i+n}]$.

Entscheidend für die Stabilität der B-Spline-Basis ist das Verhältnis von der Trägergröße zu dem Anteil des Gebietes in dem Träger. Das uniforme Kondensieren optimiert dieses Verhältnis. Für die Konstruktion sind drei Regeln einzuhalten.

Konstruktionsregeln 4.1.

1. Jedem B-Spline werden seine eigenen uniformen Knoten zugeordnet.
2. Der ursprüngliche Splineraum soll erhalten bleiben \Rightarrow NUR die Knoten außerhalb des Gebietes dürfen verändert werden.
3. Die Knoten werden so gewählt, dass ihr Abstand minimiert wird.

Dieses Verfahren reduziert somit die Größe des Trägers bei den B-Splines, welche weniger als zwei Knoten im Gebiet besitzen. In Abbildung 4.2 sind drei Beispiele für das Kondensieren dargestellt.

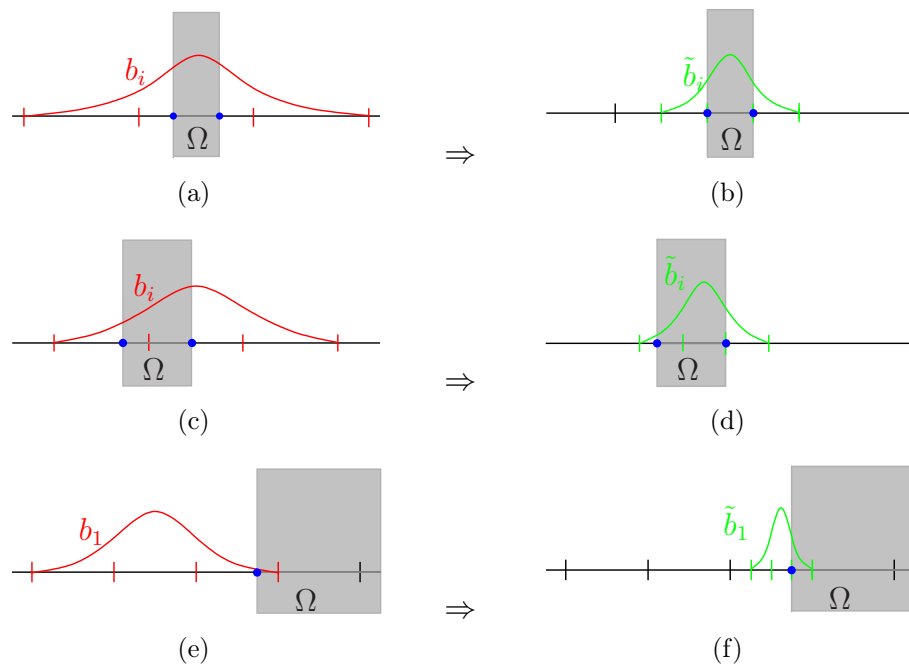


Abbildung 4.2: Anwendungsbeispiele der Konstruktionsregeln 4.1

Möckner [42, S.104 ff] zeigt, dass in Konstellationen, bei denen keine oder nur ein Knoten im Gebiet Ω liegen (siehe Beispiel 2.35 und 2.38), B-Splines existieren, die nicht n -proper (Definition 2.36 mit $\alpha = n$) sind. Hierzu zählen allerdings nicht diejenigen B-Splines, bei welchen ausschließlich der erste oder letzte Kno-

ten in Ω liegt. Diese erfüllen Kriterium K1 auf Seite 30 und sind somit n -proper. Wie in Abbildung 4.2 in dem Schritt von 4.2(e) nach 4.2(f) werden die Träger dieser B-Splines trotzdem reduziert. Dies ändert jedoch nicht, dass sie n -proper sind.

Die beiden Fälle aus Abbildung 4.2(a) und 4.2(c) stehen beispielhaft für B-Splines, welche nicht n -proper sind. Die zusammengezogenen Varianten (Abbildung 4.2(b) und 4.2(d)) erfüllen allerdings Kriterium K2 auf Seite 30 und sind somit n -proper.

Das Anwenden der Konstruktionsregeln 4.1 auf die Knoten jedes B-Splines wird *uniformes Kondensieren* genannt. Die dabei entstehenden uniformen B-Splines werden als *uniform kondensierte B-Spline* (ukB-Splines) \tilde{b}_i , $i = 1, \dots, m$, bezeichnet. Die Verschiebung der Knoten geschieht durch affine Abbildungen, bei welchen entweder ein Knoten fix ist oder die neue Knotenfolge die Randpunkte r_1 und r_2 enthält.

Definition 4.2. Sei $\Omega = (r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$ gegeben und b_i für $i \in \{1, \dots, m\}$ ein B-Spline aus $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ mit Knoten $\{t_j\}_{j=i}^{i+n}$. Der zugehörige uniform kondensierte B-Spline (ukB-Spline) ist für $t \in \Omega$ abhängig von Ω wie folgt definiert:

1. Falls $\#\{t_j : t_j \in \Omega\} = 1$:

$$\tilde{b}_i(t) := b_i \left(\frac{h}{\tilde{h}} t - \left(\frac{h}{\tilde{h}} - 1 \right) t_j \right)$$

mit

$$\tilde{h} := \begin{cases} |t_j - r_1| & i = 1 \\ \max\{|t_j - r_1|, |t_j - r_2|\} & i = 2, \dots, m-1, \\ |t_j - r_2| & i = m \end{cases}$$

wobei t_j der Knoten mit $t_j \in \Omega$ sei.

2. Falls $\#\{t_j : t_j \in \Omega\} = 0$:

$$\tilde{b}_i(t) := b_i \left(\frac{h}{|r_2 - r_1|} t + t_{n+1} - \frac{h}{|r_2 - r_1|} r_2 \right).$$

3. Falls $\#\{t_j : t_j \in \Omega\} \geq 2$:

$$\tilde{b}_i(t) := b_i(t).$$

Die normierten uniform kondensierten B-Splines werden für $t \in \Omega$ definiert als

$$\tilde{b}_i^p(t) := \frac{\tilde{b}_i(t)}{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}}.$$

Wie beschrieben, überführt das uniforme Kondensieren alle B-Splines in B-Splines, welche eines der Kriterien K1 und K2 auf Seite 30 erfüllen. Damit ist folgende Aussage gültig.

Lemma 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die ukB-Splines sind n -proper.*

Für B-Splines b_1 oder b_m , bei denen nur der erste oder letzte Trägerknoten im Gebiet liegt, gilt nach Definition 4.2

$$\tilde{b}_i(t) := b_i \left(\frac{h}{\tilde{h}} t - \left(\frac{h}{\tilde{h}} - 1 \right) t_j \right)$$

mit

$$j = \begin{cases} 1+n & \text{für } i = 1 \\ m & \text{für } i = m \end{cases}.$$

Diese B-Splines werden in dieser Arbeit *Rand-B-Splines* genannt. Die Abbildungen 4.2(e) und 4.2(f) zeigen den Vorgang des uniformen Kondensierens für b_1 . Eine Abbildung von beiden B-Splines in einer Graphik und die genauere Betrachtung der Bereiche in Ω (siehe Abbildung 4.3) lässt vermuten, dass nur eine lineare Transformation vorliegt.

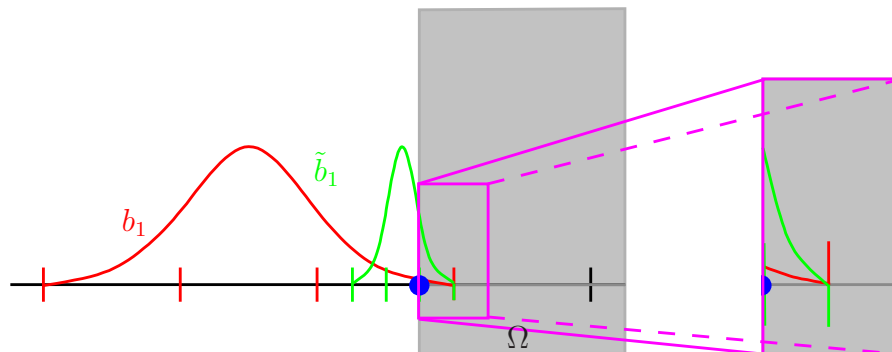


Abbildung 4.3: Rand-B-Spline

Lemma 4.4. *Gegeben sei der Splineraum $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ mit $\Omega = (r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$. Falls $t_{1+n} \in \Omega$ ($t_m \in \Omega$), so ist der ukB-Spline \tilde{b}_1 (\tilde{b}_m) über Ω durch eine lineare Transformation des ursprünglichen B-Splines zu der Knotenfolge T bestimmt. Konkret heißt das, dass für $t \in \Omega$ und $i = 1, m$ gilt*

$$\tilde{b}_i(t) = \frac{h^{n-1}}{\tilde{h}^{n-1}} b_i(t)$$

$$\text{mit } \tilde{h} = \begin{cases} |t_{1+n} - r_1|, & i = 1 \\ |t_m - r_2|, & i = m \end{cases}.$$

Beweis:

Sei $t \in \Omega$ und $t_{1+n} \in \Omega$. Für den ersten B-Spline, welcher einen Beitrag über Ω liefert, ist dann $t \in [r_1, t_{1+n})$ zu betrachten. In diesem Fall ist t aus dem letzten Knotenintervall von $\text{supp } b_1$ und von $\text{supp } \tilde{b}_1$. Damit gilt mit der Rekursionsformel für B-Splines

$$b_1(t) = \frac{(t_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)! h^{n-1}} \quad \text{und} \quad \tilde{b}_1(t) = \frac{(t_{n+1} - t)^{n-1}}{(n-1)! \tilde{h}^{n-1}}.$$

Damit ergibt sich $\tilde{b}_1(t) = \frac{h^{n-1}}{\tilde{h}^{n-1}} b_1(t)$.

Für den letzten B-Spline, welcher für Ω relevant ist, ergibt sich mit $t_m \in \Omega$, dass $t \in [t_m, r_2)$ betrachtet werden muss. Die weiteren Argumente sind analog zu dem Fall des ersten B-Splines. \square

Die Normierung der Rand-B-Splines führt zu folgender Eigenschaft.

Korollar 4.5. *Sei $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ wie in Lemma 4.4 gegeben. Der Funktionswert der normierten uniformen B-Splines $b_1^p(t)$ und $b_m^p(t)$ ist für $t \in \Omega$ unabhängig von der Lage der Knoten außerhalb von Ω . Insbesondere bedeutet dies, dass für $t \in \Omega$ gilt*

$$\tilde{b}_1^p(t) = b_1^p(t) \quad \text{und} \quad \tilde{b}_m^p(t) = b_m^p(t).$$

Beweis:

Sei $\tilde{h} = |t_{1+n} - r_1|$. Dann gilt für $t \in [r_1, t_{1+n}] = \text{supp } b_1 \cap \bar{\Omega}$ nach Lemma 4.4 $\tilde{b}_1(t) = \frac{h^{n-1}}{\tilde{h}^{n-1}} b_1(t)$. Damit folgt

$$\|\tilde{b}_1\|_{p,\Omega} = \frac{h^{n-1}}{\tilde{h}^{n-1}} \|b_1\|_{p,\Omega}$$

und somit

$$\tilde{b}_1^p(t) = \frac{\tilde{b}_1(t)}{\|\tilde{b}_1\|_{p,\Omega}} = \frac{b_1(t)}{\|b_1\|_{p,\Omega}} = b_1^p(t).$$

Analoges gilt für b_m . \square

Für theoretische Zwecke ist es wünschenswert, den ukB-Splines eine einheitliche Knotenfolge zugrunde legen zu können und nicht jeden einzelnen getrennt betrachten zu müssen. Den in dem Einführungsbeispiel 4.1 erzeugten normierten ukB-Splines liegt eine einheitliche Knotenfolge zugrunde. Dieses Beispiel entspricht dem Fall in Definition 4.2, dass keine Knoten in dem Gebiet liegen ($\#\{t_j : t_j \in \Omega\} = 0$). Die Knotenfolge, welche hier durch das uniforme Kondensieren entsteht, ist durch

$$\tilde{T} = r_1 + \tilde{h}\mathbb{Z} \quad \text{mit } \tilde{h} := |r_2 - r_1| \leq h$$

gegeben. Liegt nur ein Knoten ($m = 1 + n$) in Ω , wie zum Beispiel in Abbildung 4.2(c) und 4.2(d), scheint es naheliegend, die optimierte Knotenfolge wie folgt zu wählen:

$$\tilde{T} := t_{1+n} + \tilde{h}\mathbb{Z} \quad \text{mit } \tilde{h} := \max\{|t_{1+n} - r_1|, |t_{1+n} - r_2|\}.$$

Im Allgemeinen kann die Knotenfolgen \tilde{T} über folgende Transformation aus der Anfangsknotenfolge T gewonnen werden:

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{h}}{h} \cdot T - \frac{\tilde{h}}{h} \cdot t_{n+1} + \begin{cases} t_{n+1} & \text{falls } t_{n+1} \in \bar{\Omega} \\ r_2 & \text{falls } t_{n+1} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \quad (4.1)$$

mit

$$\tilde{h} := \begin{cases} \min\{h, \max\{|t_{1+n} - r_1|, |t_{1+n} - r_2|\}\} & \text{falls } t_{n+1} \in \bar{\Omega} \\ |r_2 - r_1| & \text{falls } t_{n+1} \notin \bar{\Omega} \end{cases}.$$

Liegen mehrere Knoten in dem Gebiet Ω , dann gilt $\tilde{h} = h$ und $\tilde{T} = T$, das heißt, die Knotenfolge bleibt unverändert.

Definition 4.6. Gegeben sei der Splineraum $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ zu einem beliebigen Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{M} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die affine Abbildung, die T auf den optimierten Knotenvektor \tilde{T} nach Formel (4.1) abbildet, das heißt, $\mathcal{M}(t_i) = \tilde{t}_i$ für $i = 1, \dots, m + n$.

1. Durch

$$\mathcal{M}[b_i] := b_i \circ \mathcal{M}^{-1}$$

wird der B-Spline zu der Knotenfolge \tilde{T} definiert.

2. Für $t \in \Omega$ wird durch

$$\mathcal{M}^p[b_i](t) := \frac{\mathcal{M}[b_i](t)}{\|\mathcal{M}[b_i]\|_{p,\Omega}}$$

der normierte B-Spline zu der Knotenfolge \tilde{T} definiert.

Für die B-Splines zu der Knotenfolge \tilde{T} und die ukB-Splines gilt der folgende Zusammenhang.

Satz 4.7. Gegeben sei ein Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$ und der Splineraum $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$. Für $t \in \Omega$ gilt

$$\tilde{b}_i^p(t) = \mathcal{M}^p[b_i](t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Beweis:

Es gilt drei Fälle zu unterscheiden: $\bar{\Omega}$ enthält

1. keine Knoten
2. einen einzigen Knoten
3. mehrere Knoten

der Knotenfolge T .

1. In Definition 4.2 werden alle B-Splines nach dem Fall 2 behandelt. Die Knotenfolge, die dabei entsteht, entspricht der Folge \tilde{T} nach (4.1).
2. Es gilt $t_{1+n} \in \Omega$. Für die ukB-Splines gilt damit:

$$\tilde{b}_i(t) := b_i \left(\frac{h}{\tilde{h}} t - \left(\frac{h}{\tilde{h}} - 1 \right) t_{1+n} \right)$$

mit

$$\tilde{h} := \begin{cases} |t_{1+n} - r_1| & i = 1 \\ \max\{|t_{1+n} - r_1|, |t_{1+n} - r_2|\} & i = 2, \dots, m-1 \\ |t_{1+n} - r_2| & i = m \end{cases}$$

Weiter gilt für die affine Abbildung \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}^{-1}(t) = \frac{h}{\hat{h}} t - \frac{h}{\hat{h}} t_{1+n} + t_{1+n},$$

mit $\hat{h} = \max\{|t_{1+n} - r_1|, |t_{1+n} - r_2|\}$. Damit folgt für $i = 2, \dots, m-1$:

$$\tilde{b}_i(t) := b_i \left(\frac{h}{\tilde{h}} t - \left(\frac{h}{\tilde{h}} - 1 \right) t_{1+n} \right) = b_i(\mathcal{M}^{-1}(t)) = \mathcal{M}[b_i](t).$$

Zwar ist $\tilde{b}_i(t) \neq \mathcal{M}[b_i](t)$ für $i = 1, m$, allerdings folgt mit Korollar 4.5:

$$\tilde{b}_i^p(t) = \mathcal{M}^p[b_i](t) \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

3. Für $i = 2, \dots, m-1$ gilt $\tilde{b}_i(t) = b_i(t)$ und da nach (4.1) $\tilde{T} = T$ ist, folgt $\tilde{b}_i(t) = \mathcal{M}[b_i](t)$. Mit demselben Argument wie in Fall 2 gilt wieder $\tilde{b}_i^p(t) = \mathcal{M}^p[b_i](t)$ für $i = 1, \dots, m$.

□

Im Folgenden ist es notwendig, dass den B-Splines eine einheitliche Knotenfolge zugrunde liegt. Daher werden diejenigen B-Splines betrachtet, welche durch die Anwendung der affinen Abbildung \mathcal{M} und anschließendem Normieren entstehen. Diese werden nun allerdings als *normierte ukB-Splines* \tilde{b}_i^p bezeichnet.

Lemma 4.8.

1. Die normierten ukB-Splines sind linear unabhängig.
2. Die Positivität der B-Splines bleibt bei dem uniformen Kondensieren erhalten, das heißt, $\tilde{b}_i^p(x) \geq 0$ für alle x und i .

Beweis:

1. Lineare Unabhängigkeit

Es gilt $\sum_i f_i \tilde{b}_i(x) = 0 \Leftrightarrow f_i = 0$ für alle i .

Sei $x \in \Omega$, dann gilt mit $f_i^p = \frac{f_i}{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}}$:

$$\begin{aligned} \sum_i f_i \tilde{b}_i^p(x) &= \sum_i f_i \frac{\tilde{b}_i(x)}{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}} = \sum_i f_i^p \tilde{b}_i(x) = 0 \Leftrightarrow f_i^p = 0 \text{ für alle } i \\ &\Leftrightarrow f_i = 0 \text{ für alle } i. \end{aligned}$$

2. Weder eine affine Transformation noch eine Normieren ändern die Positivität der B-Splines. \square

Die normierten ukB-Splines sind so konstruiert, dass der entstehende Spline auf den einzelnen Intervallen $(t_j, t_{j+1}) \cap \bar{\Omega}$ für $j = n, \dots, m$ in \mathbb{P}_n liegt. Aufgrund von Lemma 4.8 kann der *uniform kondensierte Splineraum* definiert werden als

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega) := \text{span}\{\tilde{b}_i^p, i = 1, \dots, m\}.$$

Die normierten ukB-Splines $\{\tilde{b}_i^p\}_{i=1}^m$ bilden eine Basis für diesen Splineraum. Außerdem gilt für $\Omega = (r_1, r_2) \subset \mathbb{R}$, dass

$$\mathcal{S}_n(T, \Omega) = \tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega) = \hat{\mathcal{S}}_n(T, \Omega).$$

Hierbei sei daran erinnert, dass mit $\hat{\mathcal{S}}_n(T, \Omega)$ (siehe Abschnitt 2.3.1), der optimale Splineraum für Ω bezeichnet wird.

Beliebige Gebiete

Das Verfahren des uniformen Kondensierens wird nun für beliebige Gebiete in \mathbb{R} angewendet. Beliebige Gebiete in \mathbb{R} bedeutet hier, dass diese auch aus nicht

zusammenhängenden Intervallen $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$, $N \in \mathbb{N}$, bestehen können. In diesem Fall kann es sein, dass der Träger einiger B-Splines in mehrere Teilgebiete hineinragt. Beispiele sind in Abbildung 4.4 mit den rot markierten B-Splines aufgezeigt.

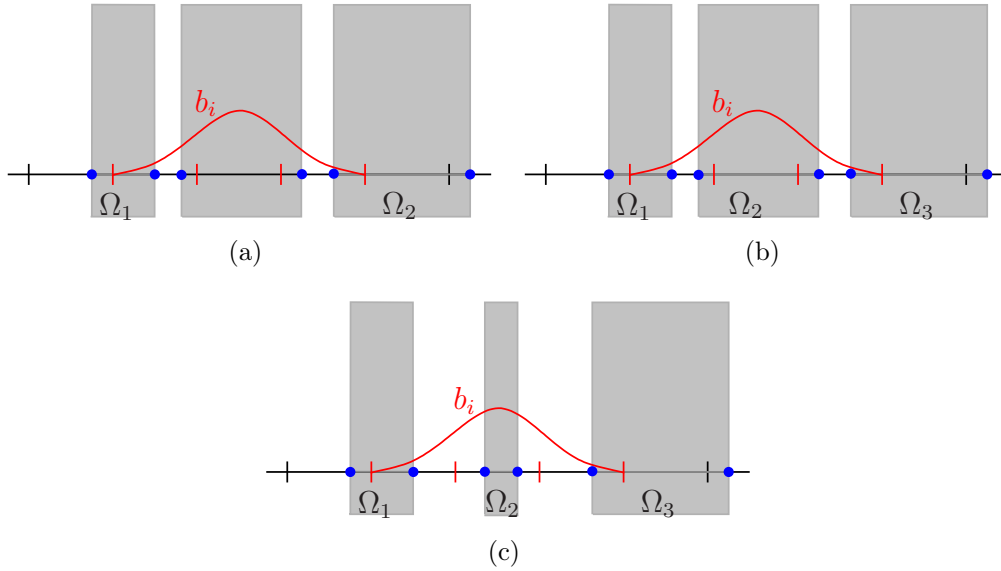


Abbildung 4.4: Beispiele für B-Splines über mehreren Teilgebieten

Die Träger dieser B-Splines können nicht zusammengezogen werden. Selbst wenn die Schnitte so liegen, dass der B-Spline durch Normieren stabilisiert werden könnte (siehe Abbildung 4.4 a,b), so kann bei der Approximation ein Problem entstehen. Die Beispiele 2.29 und 2.30 zeigen diese Probleme im bivariaten Fall. Im univariaten Fall lässt sich das Problem zwar durch eine hinreichend feine Knotenfolge lösen, allerdings ist das in höheren Dimensionen nicht der Fall. Daher wird das Kondensieren trotzdem für die Anfangsknotenfolge untersucht, die für das Approximieren ungeeignet ist.

Wenn es nur ein Teilgebiet geben würde, so würde einfach uniform kondensiert und normiert werden. Daher werden nacheinander die Teilgebiete ausgeblendet. Die B-Splines werden so kondensiert, als gäbe es nur ein Teilgebiet. Dies wird bezüglich jedes Teilgebietes durchgeführt. Diejenigen B-Splines, welche mehrere Teilgebiete schneiden, werden dabei vervielfältigt und anschließend lokal definiert.

Konstruktionsregeln 4.2.

1. Für jedes Teilgebiet Ω_l , $l = 1, \dots, N$, wird eine Basis aus ukB -Splines für $\mathcal{S}_n(T, \Omega_l)$ nach Definition 4.2 bestimmt. Dazu werden B-Splines, welche

einen Beitrag auf mehreren Teilgebieten liefern, entsprechend oft vervielfältigt.

2. Um die ukB-Splines für Ω zu bestimmen, werden nun diese lokalen Basen für Ω_l auf das jeweilige Teilgebiet eingeschränkt.

Abbildung 4.5 zeigt die drei Kopien, welche nach diesen Konstruktionsregeln aus dem B-Spline b_i in Abbildung 4.4(c) entstehen.

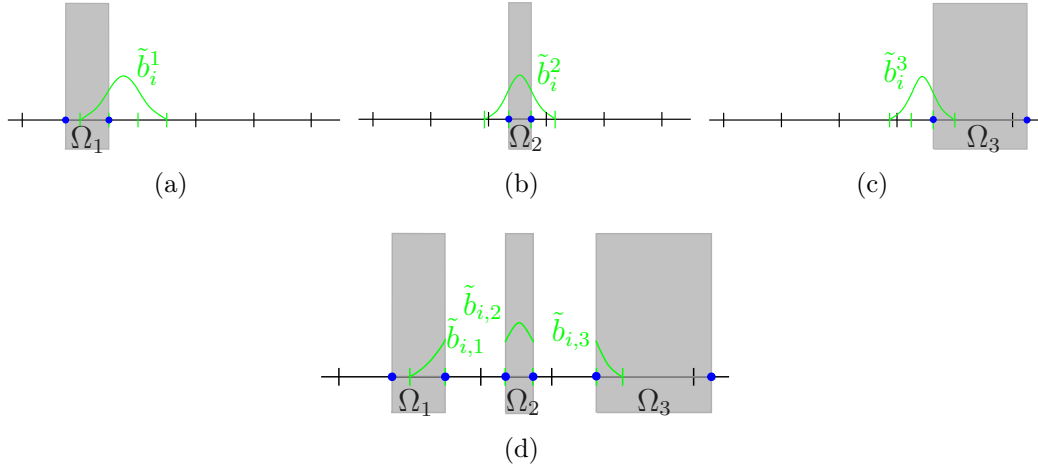


Abbildung 4.5: Beispiel für Anwendung der Konstruktionsregeln 4.2

Hierbei ist in den oberen drei Graphiken Schritt 1 und darunter Schritt 2 dargestellt.

Definition 4.9. Sei $\Omega = \cup_{l=1}^N \Omega_l$ mit $\Omega_l = (r_1^l, r_2^l) \subset \mathbb{R}$. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\text{supp } b_i \cap \Omega_l \neq \emptyset$ und $t \in \Omega_l$ bezeichne $\tilde{b}_i^{l,p}(t)$ den normierten ukB-Spline bezüglich Ω_l . Damit wird für $t \in \Omega$ und $l = 1, \dots, N$ durch

$$\tilde{b}_{i,l}^p(t) := \tilde{b}_i^{l,p}(t) \cdot \chi_{[\Omega_l]}(t)$$

der normierte lokal uniform kondensierte B-Spline (lukB-Spline) auf Ω definiert. Hierbei ist

$$\chi_{[\Omega_l]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \Omega_l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lemma 4.10. Sei $\Omega = \cup_{l=1}^N \Omega_l$ für Intervalle $\Omega_l \subset \mathbb{R}$. Die lukB-Splines sind n -proper.

Beweis:

Bezogen auf die einzelnen Teilgebiete sind die normierten ukB-Splines $\tilde{b}_i^{l,p}$ nach Lemma 4.3 n -proper. Das heißt, es existieren P_i^l und R_i^l mit

1. $P_i^l \subset \{\text{supp } \tilde{b}_i^l \cap \Omega\} \subset R_i^l$.
2. $\frac{1}{\alpha} |R_i^l| = |P_i^l|$ für $\alpha \geq 1$.
3. R_i^l und $\text{supp } \tilde{b}_i^l$ haben einen gemeinsamen Randpunkt. Das bedeutet, dass für $R_i^l := [a, b]$ entweder $a = \tilde{t}_i^l$ oder $b = \tilde{t}_{i+n}^l$ gilt.
4. $P_i^l \subset [\tilde{t}_j^l, \tilde{t}_{j+1}^l]$ für $\tilde{t}_j^l, \tilde{t}_{j+1}^l \in \text{supp } \tilde{b}_i^l$.

Die Eigenschaften 1., 2. und 4. bleiben erhalten, falls der ukB-Spline $\tilde{b}_i^{l,p}$ mit $\chi_{[\Omega_l]}(t)$ multipliziert wird.

Bei Eigenschaft 3. ist der entscheidende Punkt, dass $a = \tilde{t}_i^l$ oder $b = \tilde{t}_{i+n}^l$ gilt; auch diese Eigenschaft wird nicht beeinträchtigt. \square

Lemma 4.4 und Korollar 4.5 bleiben für $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ und die lukB-Splines gültig. Daher ist folgende Definition unter Ausnutzung von Definition 4.6 möglich.

Definition 4.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Gebiet mit $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ für $N \in \mathbb{N}$, wobei Ω_l , $l = 1, \dots, N$, disjunkte Intervalle seien. Weiter sei $\mathcal{M}_l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $l = 1, \dots, N$ die affine Abbildung, welche T auf die für das Teilgebiet Ω_l optimierte Knotenfolge \tilde{T}_l nach (4.1) abbildet.

1. Der lokale Kondensierungsoperator $\mathcal{K}_{\Omega_l} : \mathcal{S}_n(T, \Omega_l) \rightarrow \mathcal{S}_n(\tilde{T}_l, \Omega_l)$ wird für jedes Teilgebiet durch

$$\mathcal{K}_{\Omega_l}[b_i] := \mathcal{M}_l[b_i] \cdot \chi_{[\Omega_l]}$$

mit

$$\chi_{[\Omega_l]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in \Omega_l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}_l[b_i]$ die B-Splines zur Knotenfolge \tilde{T}_l nach Definition 4.6.

2. Für $t \in \Omega$ wird der normierte lokale Kondensierungsoperator definiert als

$$\mathcal{K}_{\Omega_l}^p[b_i](t) := \frac{\mathcal{K}_{\Omega_l}[b_i](t)}{\|\mathcal{K}_{\Omega_l}[b_i]\|_{p,\Omega}}.$$

Für die B-Splines, welche durch die hier definierten Operatoren entstehen, sind die beiden folgenden Aussagen gültig.

Korollar 4.12. *Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$. Die B-Splines, welche durch Anwendung der lokalen Kondensierungsoperatoren nach Definition 4.11 entstehen, sind linear unabhängig.*

Beweis:

Durch \mathcal{K}_{Ω_l} werden für jeden Punkt $t \in \Omega_l$ genau n relevante B-Splines erzeugt, welche bezüglich einer einheitlichen Knotenfolge gebildet werden. Diese sind nach Lemma 4.8 linear unabhängig. Da dies für alle Teilgebiete gilt, sind alle B-Splines nach Definition 4.11 linear unabhängig. \square

Lemma 4.13. *Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$ und der Splineraum $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$. Für $t \in \Omega$ sind die normierten lukB-Splines und die B-Splines, welche durch Anwendung der normierten lokalen Kondensierungsoperatoren entstehen, gleich.*

Beweis:

Jeder Punkt $t \in \Omega$ kann einem der Teilgebiete Ω_l , $l = 1, \dots, N$ zugeordnet werden. Dort gilt

$$\tilde{b}_i^p(t) = \tilde{b}_i^{l,p}(t) \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_{\Omega_l}^p[b_i](t) = \frac{b_i(\mathcal{M}_l^{-1}(t))}{\|b_i(\mathcal{M}_l^{-1}(\cdot))\|_{p, \Omega_l}}.$$

Mit Satz 4.7 gilt $\tilde{b}_i^{l,p}(t) = \frac{b_i(\mathcal{M}_l^{-1}(t))}{\|b_i(\mathcal{M}_l^{-1}(\cdot))\|_{p, \Omega_l}}$ und somit die Behauptung. \square

Im Folgenden werden die B-Splines als *normierte lukB-Splines* $\tilde{b}_{i,l}^p$ bezeichnet, welche durch die normierten lokalen Kondensierungsoperatoren entstehen; die durch die affine Abbildung \mathcal{M}_l entstehenden B-Splines $\mathcal{M}_l[b_i]$, welche bezüglich des Teilgebietes Ω_l gebildet werden, werden in diesem Fall durch $\tilde{b}_i^{l,p}$ benannt. Sei $\kappa_i := \#\{l : \text{supp } b_i \cap \Omega_l \neq \emptyset\}$ und $\tilde{m} := \sum_{i=1}^m \kappa_i$. Ein Spline aus dem uniform kondensierten Splineraum wird dann bezüglich der Basis $\{\tilde{b}_k^p\}_{k=1}^{\tilde{m}}$ der normierten lukB-Splines wie folgt zusammengesetzt:

$$s(t) = \sum_{l=1}^N \left(\sum_{i \in I_l} f_{i,l} \tilde{b}_{i,l}^p(t) \right) := \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \tilde{b}_k^p(t), \quad (4.2)$$

wobei $I_l := \{i : \text{supp } b_i \cap \Omega_l \neq \emptyset\}$. Es gilt

$$\mathcal{S}_n(T, \Omega) \subset \tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega) := \text{span}\{\tilde{b}_k^p, k = 1, \dots, \tilde{m}\} \subseteq \hat{\mathcal{S}}_n(T, \Omega),$$

wobei $\hat{\mathcal{S}}_n(T, \Omega)$ der Splineraum, wie in Abschnitt 2.3.1) definiert, ist. Da die Knoten der lukB-Splines nicht aus einer einzigen Knotenfolge stammen, werden jedem lukB-Spline \tilde{b}_k seine eigenen Knoten $\{\tilde{t}_{k,j}\}_{j=1}^{n+1}$ zugeordnet.

Bemerkung 4.14. Für $N = 1$ entsprechen die lukB-Splines den ukB-Splines für zusammenhängende Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}$.

4.1.2 Stabilität

Wie das Einführungsbeispiel 4.1 vermuten lässt, ist die Basis aus den normierten lukB-Splines wirklich stabil. Bevor dies allerdings gezeigt werden kann, müssen zuerst Funktionale bestimmt werden, welche zu diesen Basiselementen dual sind.

Lemma 4.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend.*

1. *Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ und beliebiges $\xi \in \{\text{supp } \tilde{b}_i \cap \Omega\}$ ist durch*

$$\tilde{\lambda}_i(f) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha < n} (-1)^{(n-1-\alpha)} \tilde{\psi}_i^{(n-1-\alpha)}(\xi) f^{(\alpha)}(\xi)$$

ein zu den ukB-Splines der Ordnung n duales univariates de Boor-Fix Funktional definiert. Hierbei sind die $\tilde{\psi}_i \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $i = \{1, \dots, m\}$, definiert durch

$$\tilde{\psi}_i(x) := \prod_{j=1}^{n-1} (\tilde{t}_{i+j} - x)$$

zu den Knoten $\{\tilde{t}_{i+j}\}_{j=1}^{n-1}$ des ukB-Splines \tilde{b}_i .

2. *Sei $\tilde{\lambda}_i$ das de Boor-Fix Funktional mit $\xi \in \{\text{supp } \tilde{b}_i \cap \Omega\}$. Für die normierten ukB-Splines \tilde{b}_i^p der Ordnung n wird durch*

$$\Lambda_i := \|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_i$$

ein duales Funktional definiert.

Beweis:

1. Da Ω zusammenhängend ist, liegt den ukB-Splines \tilde{b}_i , $i = 1, \dots, m$, eine einheitliche Knotenfolge \tilde{T} zugrunde. Mit Satz 2.24 folgt die Dualität $\tilde{\lambda}_i(\tilde{b}_j) = \delta_{ij}$.

2. Es gilt

$$\Lambda_i(\tilde{b}_j^p) = \|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_i\left(\frac{\tilde{b}_j}{\|\tilde{b}_j\|_{p,\Omega}}\right) = \frac{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}}{\|\tilde{b}_j\|_{p,\Omega}} \tilde{\lambda}_i(\tilde{b}_j).$$

Mit Teil 1 folgt, $\Lambda_i(\tilde{b}_j^p) = 0$ für $i \neq j$. Für $i = j$ ergibt sich

$$\Lambda_i(\tilde{b}_i^p) = \frac{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}}{\|\tilde{b}_i\|_{p,\Omega}} = 1.$$

□

Lemma 4.16. *Sei $\Omega := \cup_{l=1}^N \Omega_l \subset \mathbb{R}$. Für $k = 1, \dots, \tilde{m}$ und $\xi \in \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$ wird durch*

$$\Lambda_k := \|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_k$$

ein zu den lukB-Splines der Ordnung n duales Funktional definiert. Hierbei ist $\tilde{\lambda}_k$ das de Boor-Fix Funktional mit

$$\tilde{\psi}_k(x) := \prod_{j=2}^n (\tilde{t}_{k,j} - x)$$

zu den Knoten $\{\tilde{t}_{k,j}\}_{j=2}^n$ des lukB-Splines \tilde{b}_k .

Beweis:

Für $\xi \in \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$ gilt, $\xi \in \Omega_l$ für ein $l \in \{1, \dots, N\}$ und $\tilde{b}_k = \tilde{b}_{i,l}$ für ein $i \in I_l$. Für jedes Teilgebiet Ω_l gibt es eine einheitliche uniform kondensierte Knotenfolge \tilde{T}_l und zugehörige normierte lukB-Splines $\{\tilde{b}_{i,l}^p\}_{i \in I_l}$. Zu diesen wird nach Lemma 4.15 durch $\Lambda_{i,l} := \|\tilde{b}_{i,l}\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_{i,l}$ für $\xi \in \{\text{supp } \tilde{b}_{i,l} \cap \Omega\}$ ein duales Funktional definiert. Da der Träger jedes $\tilde{b}_{i,l}^p$ auf das jeweilige Teilgebiet Ω_l beschränkt ist, ist $\Lambda_{i,l}$ ein duales Funktional für alle normierten lukB-Splines des gesamten Gebietes Ω . Eine Umindizierung analog zu (4.2) führt zu dem gewünschten Resultat. □

Um zeigen zu können, dass die Konditionszahl der normierten lukB-Splines beschränkt ist, müssen die Ableitungen von $\tilde{\psi}_i$ gleichmäßig beschränkt sein (siehe E1 auf Seite 23). Dies ist jedoch für beliebige Gebiete nicht notwendigerweise erfüllt. Durch das Normieren kann allerdings folgendes Resultat ausgenutzt werden (siehe auch [43]).

Lemma 4.17. *Gegeben sei $\tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega)$ für zusammenhängendes $\Omega := (r_1, r_2)$ und weiter gelte $R = [0, 1]$. Für $i = 1, \dots, m$ und $t_i = 0$ gilt*

$$\|\tilde{b}_i\|_{\infty,R} \|\tilde{\psi}_i^{(\alpha)}\|_{\infty,R} \leq (n-1)!$$

für alle $\alpha = 1, \dots, n-1$.

Beweis:

Über einem zusammenhängenden Gebiet Ω führt das uniforme Kondensieren zu einer einheitlichen uniformen Knotenfolge. Das heißt aber auch, dass die ukB-Splines \tilde{b}_i und die passenden dualen Funktionalen $\tilde{\psi}_i$ den klassischen B-Splines und de Boor-Fix Funktionalen zu dieser Knotenfolge entsprechen. Für diese ist das Lemma erfüllt (siehe [43, Lemma 3.1]). \square

Die folgenden Resultate werden für $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N$ und normierte lukB-Splines nach Definition 4.11 bewiesen. Für $N = 1$ zählen auch zusammenhängende Gebiete $\Omega = (r_1, r_2)$ in die betrachtete Menge und wie schon in Bemerkung 4.14 erwähnt, entsprechen hier die normierten ukB-Splines den normierten lukB-Splines.

Satz 4.18. *Es existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle Splines s aus $\tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega)$ mit $s = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{b}_k^\infty f_k$ für Koeffizienten $f_k \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$c(\max_k |f_k|) \leq \sup_{x \in \Omega} |s(x)| \leq C(\max_k |f_k|).$$

Hierbei sind die Konstanten abhängig von n .

Beweis:

Sei $x \in \Omega$. Weiter seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit $j = 1, \dots, n$ die Indizes der für x relevanten normierten lukB-Splines. Es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Omega} |s(x)| &= \sup_{x \in \Omega} \left| \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{b}_k^\infty(x) f_k \right| \leq \sup_{x \in \Omega} \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |\tilde{b}_k^\infty(x)| |f_k| \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n \frac{|\tilde{b}_j(x)|}{\|\tilde{b}_j\|_{\infty, \Omega}} \right) \cdot \max_k |f_k| \leq n \cdot \max_k |f_k|. \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass ein $c > 0$ existiert mit $c(\max_k |f_k|) \leq \max_{x \in \Omega} |s(x)|$.

Für $k = 1, \dots, \tilde{m}$ sei $\xi_k \in \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$. Dann ist $\xi_k \in \{I_{k,j} \cap \Omega\}$ für ein Knotenintervall $I_k := [\tilde{t}_{k,j}, \tilde{t}_{k,j+1})$, $j \in \{1, \dots, n\}$, des lukB-Splines \tilde{b}_k . Es gilt

$$\begin{aligned} |f_k| = |\Lambda_k(s)| &= \|\tilde{b}_k\|_{\infty, \Omega} \left| \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha < n} (-1)^{(n-1-\alpha)} \tilde{\psi}_k^{(n-1-\alpha)}(\xi_k) s^{(\alpha)}(\xi_k) \right| \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \|\tilde{b}_k\|_{\infty, \Omega} \max_{\alpha < n} |\tilde{\psi}_k^{(n-1-\alpha)}(\xi_k)| \sum_{\alpha=0}^{n-1} |s^{(\alpha)}(\xi_k)| \end{aligned}$$

Die Summe der Beträge der Ableitungen an der Stelle ξ_k entspricht auf dem Raum der Polynome einer Norm. Da $\xi_k \in \{I_{k,j} \cap \Omega\}$ und $s|_{I_{k,j} \cap \Omega} \in \mathbb{P}_n(I_{k,j} \cap \Omega)$ ist, sei $\sum_{\alpha=0}^{n-1} |s^{(\alpha)}(\xi_k)| =: \|s\|_{\xi_k}$ definiert.

Nach Lemma 4.10 sind alle normierten lukB-Splines n -proper (siehe Definition 2.36). Somit existieren zwei Intervalle R_k und P_k mit

1. $1 = |R_k| = n \cdot |P_k|$.
2. $P_k \subset \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$.
3. $P_k \subset [\tilde{t}_{k,j}, \tilde{t}_{k,j+1}]$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Nach (2.9) sind die de Boor-Fix Funktionale a^3 -invariant. Da auch die L_∞ -Norm von den Skalierungen unabhängig ist, ist auch Λ_k a^3 -invariant. Somit kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_k = [0, 1]$ skaliert werden. Weiter kann angenommen werden, dass $\tilde{t}_{k,1}$ ein Randpunkt von R_k ist.

Sei $P_k := [p_1^k, p_2^k]$. Da $\xi_k \in \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$ beliebig ist, sei $\xi_k := \frac{p_1^k + p_2^k}{2}$. Damit gilt $\xi_k \in P_k \subset R_k$. Die Normen $\|\cdot\|_{\xi_k}$ und $\|\cdot\|_{\infty, P_k}$ sind auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $\mathbb{P}_n(P_k)$ äquivalent. Da $s \in \mathbb{P}_n(P_k)$ ist, existiert ein c_n , so dass $\|s\|_{\xi_k} \leq c_n \|s\|_{\infty, P_k}$. Hierbei ist c_n nur von n abhängig, da $|P_k| = \frac{1}{n} |R_k| = \frac{1}{n}$.

Da $\{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\} \subset R_k$ ist, gilt $\|\tilde{b}_k\|_{\infty, \Omega} \leq \|\tilde{b}_k\|_{\infty, R_k}$. Weiter gilt durch die Wahl $\xi_k \in P_k \subset R_k$ und unter Ausnutzung von Lemma 4.17 für alle $k = 1, \dots, \tilde{m}$

$$|f_k| \leq \frac{c_n}{(n-1)!} \|s\|_{\infty, P_k} \|\tilde{b}_k\|_{\infty, R_k} \max_{\alpha < n} \|\tilde{\psi}_k^{(\alpha)}\|_{\infty, R_k} \leq c_n \|s\|_{\infty, P_k} \leq c_n \|s\|_{\infty, \Omega}.$$

Damit ist gezeigt, dass ein c_n existiert, so dass

$$c_n^{-1} (\max_k |f_k|) \leq \sup_{x \in \Omega} |s(x)|.$$

□

Ein entscheidender Punkt, weshalb die Abschätzung nach unten gültig ist, ist die Skalierungsunabhängigkeit der L_∞ -Norm. Um zu zeigen, dass auch für L_p -Normen eine gleichmäßige Beschränkung der Konditionszahl der normierten lukB-Splines vorliegt, wird nun eine analoge Eigenschaft benötigt.

Sei $F = (f_1, \dots, f_{\tilde{m}})$ der Vektor der Koeffizienten eines Splines $s = \sum_k f_k \tilde{b}_k^p$. Die Abschätzung $c \|F\|_p \leq \|s\|_{p, \Omega}$ für $c > 0$ ist a^3 -invariant (siehe Definition 2.28). Hierbei ist die Norm der Koeffizienten die l_p -Norm und die Norm der Splines über Ω die L_p -Norm.

Lemma 4.19. Sei $s \in \mathcal{S}_n(T, \Omega)$ mit $s = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \tilde{b}_k^p$ und $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine a^3 -Abbildung mit $\mathcal{A}(t) = \alpha t + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, welche $R \subset \mathbb{R}$ auf Ω abbildet. Weiter sei $\hat{s} := \mathcal{A}(s) \in \mathcal{S}_n(\mathcal{A}(T), R)$ mit $\hat{s} = \sum_k \hat{f}_k \hat{b}_k^p$, wobei \hat{b}_k^p den normierten B-Spline $\mathcal{A}(\tilde{b}_k)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\|F\|_p = |\alpha|^{\frac{1}{p}} \|\hat{F}\|_p \quad \text{und} \quad \|s\|_{p,\Omega} = |\alpha|^{\frac{1}{p}} \|\hat{s}\|_{p,R}.$$

Beweis:

Da normierte lukB-Splines betrachtet werden, wird nun zuerst untersucht wie sich die Norm eines lukB-Splines durch Anwendung von \mathcal{A} verändert.

Mit der Substitution $y = \alpha \cdot x + \beta$ gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega} &= \left(\int_{\Omega} |\tilde{b}_k(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_R |\tilde{b}_k(\alpha \cdot x + \beta)|^p |\alpha| dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha|^{\frac{1}{p}} \|\mathcal{A}(\tilde{b}_k)\|_{p,R}. \end{aligned}$$

Für den Spline \hat{s} folgt damit durch einfaches Einsetzen

$$\hat{s} = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \mathcal{A}(\tilde{b}_k^p) = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \frac{\mathcal{A}(\tilde{b}_k)(t)}{\|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega}} = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k |\alpha|^{-\frac{1}{p}} \frac{\mathcal{A}(\tilde{b}_k)(t)}{\|\mathcal{A}(\tilde{b}_k)\|_{p,R}} = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k |\alpha|^{-\frac{1}{p}} \hat{b}_k^p.$$

Die Koeffizienten von \hat{s} sind somit $\hat{f}_k := f_k \cdot |\alpha|^{-\frac{1}{p}}$ und

$$\|\hat{F}\|_p^p = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |\hat{f}_k|^p = |\alpha|^{-1} \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k|^p = |\alpha|^{-1} \|F\|_p^p.$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Omega = (r_1, r_2)$. Dann ergibt sich mit der Substitution $t = \alpha \cdot u + \beta$

$$\begin{aligned} \|s\|_{p,\Omega}^p &= \int_{r_1}^{r_2} \left| \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \frac{\tilde{b}_k(t)}{\|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega}} \right|^p dt \\ &= \int_{\mathcal{A}^{-1}(r_1)}^{\mathcal{A}^{-1}(r_2)} \left| \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \frac{\mathcal{A}(\tilde{b}_k)(u)}{\|\mathcal{A}(\tilde{b}_k)\|_{p,\mathcal{A}^{-1}(\Omega)} \cdot |\alpha|^{\frac{1}{p}}} \right|^p |\alpha| du \\ &= |\alpha| \cdot \|\mathcal{A}(s)\|_{p,R}^p. \end{aligned}$$

□

Satz 4.20. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$. Es existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle Splines $s \in \tilde{\mathcal{S}}_n(T, \Omega)$ mit $s = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \tilde{b}_k^p$

$$c \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega} \leq C \|F\|_p$$

gilt. Hierbei sind die Konstanten nur abhängig von n und p .

Beweis:

Sei $x \in \Omega$. Um die Abschätzung nach oben vornehmen zu können, wird zu allererst die Höldersche Ungleichung für Summen ausgenutzt. Seien p und q zueinander konjugiert, also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} |s(x)| &\leq \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{b}_k^p(x) \cdot \chi_{\text{supp } \tilde{b}_k}(x)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{b}_k^p(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |\chi_{\text{supp } \tilde{b}_k}(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq n^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{b}_k^p(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung mit $n^{1/q}$ ist möglich, da nur n B-Splines an dem Punkt x ungleich Null sind. In die L_p -Norm des Splines eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \|s\|_{p,\Omega} &= \left(\int_{\Omega} |s(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(n^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{b}_k^p(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq n^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k|^p \cdot \int_{\Omega} (\tilde{b}_k^p(t))^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{q}} \|F\|_p. \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass ein c existiert mit $c \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega}$.

Es soll ausgenutzt werden, dass $|f_k| = |\Lambda_k(s)|$. Da alle lukB-Splines n -proper sind, gilt wie auch bei dem Beweis von Satz 4.18, dass für jeden B-Spline \tilde{b}_k Intervalle R_k und P_k existieren mit $P_k \subset [\tilde{t}_{k,j}, \tilde{t}_{k,j+1})$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Sei $\tilde{t}_{k,1}$ ein Randknoten von R_k .

Sei $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{A}(t) = |R_k|t + \tilde{t}_{k,1}$. Dann bildet \mathcal{A} das Intervall $[0, 1]$ auf R_k ab, da $\mathcal{A}(0) = \tilde{t}_{k,1}$ und $\mathcal{A}(1) = |R_k| + \tilde{t}_{k,1}$ ist. Mit Lemma 4.19 gilt

$$c\|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad c\|\hat{F}\|_p \leq \|\mathcal{A}(s)\|_{p,\mathcal{A}^{-1}(\Omega)},$$

wobei \hat{F} den Koeffizientenvektor von $\mathcal{A}(s)$ bezeichne. Es wird daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $R_k = [0, 1]$ und $\tilde{t}_{k,1} = 0$ ist.

Sei $\xi_k \in \{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\}$ für ein $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$, dann gilt $\xi_k \in \{I_{k,j} \cap \Omega\}$ für ein Knotenintervall $I_{k,j} := [\tilde{t}_{k,j}, \tilde{t}_{k,j+1})$, $j \in \{1, \dots, n\}$ des lukB-Splines \tilde{b}_k . Es gilt

$$|f_k| = |\Lambda_k(s)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega} \max_{\alpha < n} |\tilde{\psi}_k^{(n-1-\alpha)}(\xi_k)| \sum_{\alpha=0}^{n-1} |s^{(\alpha)}(\xi_k)|. \quad (4.3)$$

Die Summe der Beträge der Ableitungen an der Stelle ξ_k entspricht auf dem Raum der Polynome einer Norm. Da $s|_{I_{k,j} \cap \Omega} \in \mathbb{P}_n(I_{k,j} \cap \Omega)$ ist, sei wieder $\sum_{\alpha=0}^{n-1} |s^{(\alpha)}(\xi_k)| =: \|s\|_{\xi_k}$ definiert.

Sei nun $P_k = [p_1^k, p_2^k] \subset \{I_{k,j} \cap \Omega\}$. In Ungleichung (4.3) wird $\xi_k := \frac{p_1^k + p_2^k}{2}$ gesetzt. Mit der selben Argumentation wie in dem Beweis von Satz 4.18 ergibt sich nun, dass $c_{n,p}$ existiert, so dass $\|s\|_{\xi_k} \leq c_{n,p} \|s\|_{p,P_k}$. Hier ist die Konstante zusätzlich von der gewählten L_p -Norm abhängig.

Da $\{\text{supp } \tilde{b}_k \cap \Omega\} \subset R_k = [0, 1]$ ist, gilt $\|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega} \leq \|\tilde{b}_k\|_{\infty,R_k}$. Weiter wurde $\xi_k \in P_k \subset R_k$ gewählt und damit gilt für alle $k = 1, \dots, \tilde{m}$

$$|f_k| \leq \frac{c_{n,p}}{(n-1)!} \|s\|_{p,P_k} \|\tilde{b}_k\|_{\infty,R_k} \max_{\alpha < n} \|\tilde{\psi}_k^{(\alpha)}\|_{\infty,R_k} \leq c_{n,p} \|s\|_{p,P_k}.$$

Für die letzte Abschätzung wurde hierbei ausgenutzt, dass nach Lemma 4.17 gilt, dass $\|\tilde{b}_k\|_{\infty,R_k} \max_{\alpha < n} \|\tilde{\psi}_k^{(\alpha)}\|_{\infty,R_k} \leq (n-1)!$. Von den \tilde{m} Intervallen P_k können sich maximal n schneiden, da nur n lukB-Splines über dem Intervall $P_k \subset \{I_{k,j} \cap \Omega\}$ einen Beitrag liefern. Weiter gilt $\|s\|_{p,P_k} \leq \|s\|_{p,\Omega}$ und schließlich folgt

$$\|F\|_p^p = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\tilde{m}} (c_{n,p} \cdot \|s\|_{p,P_k})^p \leq n c_{n,p}^p \|s\|_{p,\Omega}^p.$$

Das heißt, für $c'_{n,p} := \left(n^{\frac{1}{p}} \cdot c_{n,p}\right)^{-1}$ gilt

$$c'_{n,p} \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega}.$$

□

4.2 Bivariate Splines

Die univariaten Ergebnisse sollen nun auf den bivariaten Fall übertragen werden. Der Gebietsanteil in den einzelnen Trägern soll unter Erhaltung des Splineraumes optimiert werden. Da die B-Splines aus der Multiplikation univariater B-Splines entstehen, wird hierzu jeder dieser univariaten Anteile einzeln kondensiert. Im nächsten Abschnitt wird zuerst Beispiel 2.39 betrachtet. In diesem wurde gezeigt, dass das Normieren des betrachteten B-Splines nicht ausreichend ist, da der B-Spline nicht α -proper ist.

Nachdem die bivariate Konstruktion entwickelt ist, wird in Abschnitt 4.2.2 nachgewiesen, dass sie zu einer stabilen Basis führt. In Abschnitt 4.2.3 und 4.2.4 wird schließlich untersucht, ob die gewünschte Fehlerabschätzung (2.11) unabhängig von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen für die Approximation und deren Ableitungen erfüllt ist.

4.2.1 Konstruktion

Über einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ der Splineraum der Ordnung $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ mit dem Tensorprodukt-Gitter (TP-Gitter) $T = T_1 \otimes T_2$, wobei

$$\begin{aligned} T_1 &= \{t_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{mit} \quad |t_{i+1} - t_i| = h_1, \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}, \\ T_2 &= \{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \quad \text{mit} \quad |s_{j+1} - s_j| = h_2, \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

sei. Mit

$$B_{ij}(x, y) = b_{1,i}(x) b_{2,j}(y), \quad (i, j) \in I_{\Omega} := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : \text{supp } B_{ij} \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset\},$$

werden die Tensorprodukt-B-Splines bezeichnet, welche für das Gebiet Ω relevant sind. Die Zellen des Gitters, welche das Gebiet schneiden, seien Z_{kl} mit $(k, l) \in K_{\Omega} := \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 : Z_{kl} \cap \Omega \neq \emptyset\}$. Für jede solche Zelle gibt es $n_1 \times n_2$ relevante TPB-Splines. Der Einfachheit halber sei daher immer, wenn $(x, y) \in Z_{kl}$ für beliebige $(k, l) \in K_{\Omega}$ betrachtet wird, $i \in \{1, \dots, n_1\}$ und $j \in \{1, \dots, n_2\}$.

In dem folgenden Beispiel wird untersucht, ob das Zusammenziehen der Knoten in beiden Koordinatenrichtungen nach Konstruktionsregel 4.1 zu B-Splines führen kann, welche α -proper sind.

Beispiel 4.21. Gegeben sei derselbe konvexe Schnitt eines Trägers mit einem Lipschitzgraph Gebiet Ω wie in Beispiel 2.39. Abbildung 4.6(a) zeigt den Träger, welcher durch das uniforme Kondensieren der Knotenfolge T_1 entsteht. Nun könnten zusätzlich die Knoten aus T_2 verschoben werden. Allerdings ist $b_{2,j}$

durch die Lage des Schnittes mit Ω nach der Normierung unabhängig von der Lage der Knoten (siehe Korollar 4.5). Daher werden diese hier nicht verändert.

Hier wird angenommen, dass $n_1 = n_2 = n$ ist. Seien nun R und P die Rechtecke, welche die Bedingungen aus Definition 2.36 erfüllen. Zu bestimmen ist die Größe von α . Für das Rechteck R , welches den Schnitt $\text{supp } \tilde{B}_{ij} \cap \Omega$ und eine Ecke des Trägers enthält, gilt:

$$|R| = (a \cdot h_1, r_2) \leq \left(\frac{n+1}{2} h_1, h_2\right), \quad \text{für } a \in \mathbb{N}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass die linke untere Ecke von R der Punkt $(0,0)$ sei. Die den Rand beschreibende Funktion φ ist Lipschitz-stetig und erfüllt folgende Bedingungen (siehe Abbildung 4.6):

$$\varphi(0) = \varphi(h_1) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\xi_0) = r_2 \quad \text{für } \xi_0 \in (0, h_1).$$

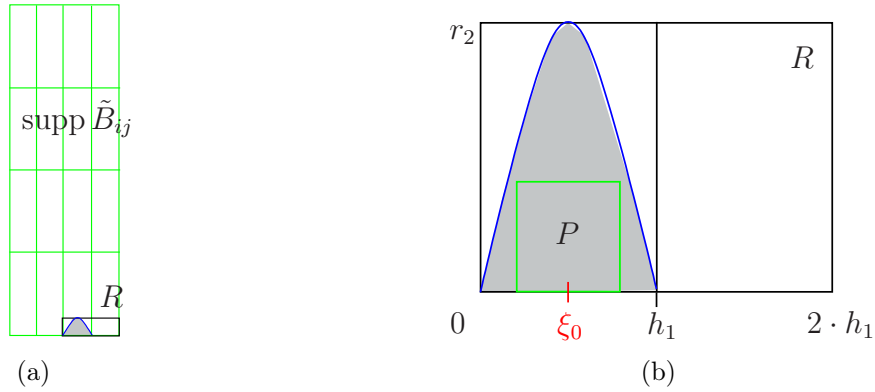


Abbildung 4.6: Kondensierter Problemfall für $n = 4$, Ω konvex

Es gilt:

- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(0)| \leq L \cdot \xi_0.$
- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(h_1)| \leq L \cdot (h_1 - \xi_0).$

$$\Rightarrow \quad \frac{r_2}{L} \leq \xi_0 \leq h_1 - \frac{r_2}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{2 r_2}{h_1} \leq L.}$$

Ist $\frac{2 r_2}{h_1} > L$, so entsteht der hier betrachtete Schnitt nicht. In diesem Fall gehört der B-Spline zu der Menge der substantiellen B-Splines [42, S.129f], welche **n**-proper sind.

Der betrachtete Schnitt ist konvex, daher verläuft φ für alle L wie folgt:

- $\varphi(x) \geq \frac{r_2}{\xi_0} x =: g_1(x)$ für $x \in (0, \xi_0)$.
- $\varphi(x) \geq \frac{r_2}{\xi_0 - h_1} x - h_1 \cdot \frac{r_2}{\xi_0 - h_1} =: g_2(x)$ für $x \in (\xi_0, h_1)$.

Damit ergibt sich, dass der Graph außerhalb eines Dreiecks mit den Eckpunkten (ξ_0, r_2) , $(0, 0)$ und $(h_1, 0)$ liegt. Das Rechteck P mit dem Seitenlängenvektor $|P| = (\frac{a \cdot h_1}{\alpha}, \frac{r_2}{\alpha}) < (h_1, r_2)$ existiert somit für

$$\alpha > \max\{1, a\} \quad \text{mit} \quad \frac{n+1}{2} \geq a \geq 1.$$

■

Das uniforme Kondensieren im bivariaten Fall als uniformes Kondensieren nach Definition 4.2 in den einzelnen Richtungen zu betrachten, ist offensichtlich ein sinnvoller Ansatz. Bevor dies allerdings genauer ausgeführt wird, müssen die notwendigen Bedingungen an die Schnitte $\text{supp } B_{ij} \cap \Omega$ und damit an Ω geklärt werden. In Beispiel 4.21 wurde vorausgesetzt, dass die den Rand beschreibende Funktion Lipschitz-stetig ist. Dies muss hier allerdings nicht notwendigerweise bezüglich x sein. Aufgrund der a^3 -Invarianz der B-Splines existieren a^3 -Abbildungen, welche den B-Spline B_{ij} so rotieren, dass der Rand $\partial\Omega|_{\text{supp } B_{ij}}$ bezüglich y als Lipschitz-stetige Funktion darstellbar ist. Damit sind die Gebiete nach Definition 3.1 ausgezeichnete Kandidaten.

Nun kann ein Träger mehrere nicht zusammenhängende Schnitte mit Ω besitzen. In diesem Fall werden die B-Splines entsprechend der Konstruktionsregel 4.2 vervielfältigt und bezüglich jedes einzelnen Schnittes kondensiert. Die einzige Bedingung hierbei sei, dass die Anzahl der Schnitte endlich ist.

Definition 4.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Der Rand $\partial\Omega$ gehört zu der Klasse $\text{Lip}_E 1$ mit den Parametern s , η und L , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$ (siehe Definition 3.1).
2. Seien $V_r := [a_1^r, b_1^r] \times [a_2^r, b_2^r]$ für $r \in \{1, \dots, s\}$ die Rechtecke aus Definition 3.1 und φ_r die zugehörigen Lipschitz-stetigen Funktionen. Bis auf Permutation der Koordinaten abhängig von r gilt, dass für jedes $d \in [a_2^r, b_2^r]$ offene Intervall I_j , $j = 1, \dots, N_r(d)$ mit $N_r(d) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\{x : \varphi_r(x) > d\} = \bigcup_{j=1}^{N_r(d)} I_j \quad \text{mit} \quad \sup_d (N_r(d)) = c < \infty$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Für den Schnitt eines Gebietes mit Rand der Klasse $\text{Lip}_E 1$ mit einem beliebigen TPB-Splines B_{ij} gilt, dass es eine endliche Anzahl von Zusammenhangskomponenten G_{ij}^ν , $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$, mit

$$\text{supp } B_{ij} \cap \bar{\Omega} = \bigcup_{\nu=1}^{u_{ij}} G_{ij}^\nu \quad (4.4)$$

gibt. Bezüglich dieser einzelnen Schnitte sollen die lukB-Splines gebildet werden. Falls eine solche Zusammenhangskomponente vollständig in mindestens einem Teilgebiet $\Omega \cap V_r$, $r \in \{1, \dots, s\}$, liegt, so gilt

$$\partial\Omega|_{G_{ij}^\nu} \in \text{Lip } 1. \quad (4.5)$$

In der folgenden Definition wird das Anfangsgitter so gewählt, dass dies erfüllt ist.

Definition 4.23. Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Weiter sei die Gitterweite h des Anfangsgitters so gewählt, dass für $(i, j) \in I_\Omega$ sowohl (4.4) als auch (4.5) erfüllt ist. Der lokal uniform kondensierte B-Spline (lukB-Spline) \tilde{B}_{ij}^ν wird für $(x, y) \in \Omega$ und $\nu = 1, \dots, u_{ij}$ definiert als

$$\tilde{B}_{ij}^\nu(x, y) := \tilde{b}_{1,i}^\nu(x) \tilde{b}_{2,j}^\nu(y) \chi_{[G_{ij}^\nu]}(x, y)$$

mit

$$\chi_{[G_{ij}^\nu]}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y) \in G_{ij}^\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei bezeichne $\tilde{b}_{1,i}^\nu(x)$ den univariaten ukB-Spline über $\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in G_{ij}^\nu\}$ und $\tilde{b}_{2,j}^\nu(y)$ den univariaten ukB-Spline über $\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in G_{ij}^\nu\}$.

Die normierten lukB-Splines sind damit auf Ω definiert als

$$\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) := \frac{\tilde{B}_{ij}^\nu(x, y)}{\|\tilde{B}_{ij}^\nu\|_{p,\Omega}}.$$

Es bleibt zu klären, ob das Vervielfältigen und getrennte Optimieren zielführend ist. In Beispiel 4.21 überführt das Kondensieren den ursprünglich „instabilen“ B-Spline in einen B-Spline, der α -proper mit $\alpha = \alpha(\mathbf{n})$ abhängig von \mathbf{n} ist. In diesem Beispiel wird allerdings gefordert, dass φ konvex ist. Aber auch die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit von φ (Abbildung 4.7) ist ausreichend.

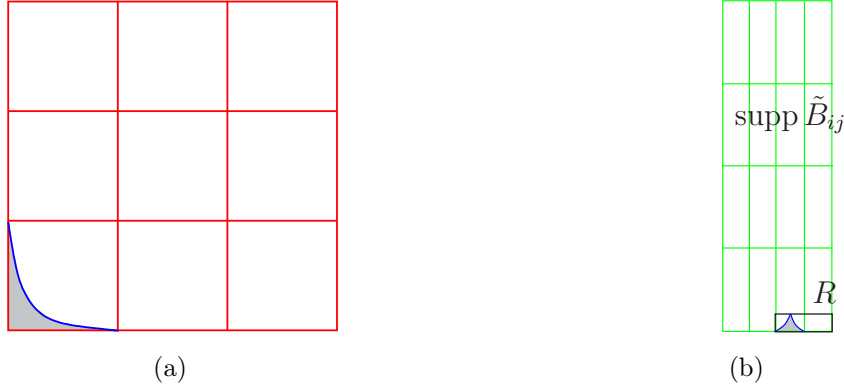


Abbildung 4.7: Beispiele konkaver Schnitte

Die hier und im Folgenden abgebildeten Träger stellen streng genommen nicht den endgültigen Träger der lukB-Splines dar. Diese werden durch die Multiplikation mit χ auf die jeweils zugrunde liegende Zusammenhangskomponente eingeschränkt. Für die Eigenschaft α -proper zu sein, sind allerdings die den B-Spline bestimmenden Knotenpunkte interessant. Diese verändern sich durch das Einschränken des Trägers nicht. In den Illustrationen werden daher alle Knoten aufgezeigt.

Lemma 4.24. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Rand der Klasse $\text{Lip}_E 1$ und sei L die Lipschitz-Konstante. Die lukB-Splines \tilde{B}_{ij}^ν , $(i, j) \in I_\Omega$, sind α -proper mit $\alpha := \alpha(\mathbf{n}, \Omega)$ abhängig von \mathbf{n} und der Lipschitzkonstanten L des Gebietes Ω .*

Beweis:

Durch die a^3 -Invarianz der B-Splines wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass der Rand $\partial\Omega|_{G_{ij}^\nu}$ bezüglich der x -Koordinate durch φ beschrieben wird.

Sobald ein Schnitt eine Gitterzelle vollständig enthält, ist der B-Spline \mathbf{n} -proper. Somit müssen nur Schnitte betrachtet werden, welche keine vollständige Zelle enthalten.

Unproblematisch ist der B-Splines auch dann, wenn die den Rand beschreibende Funktion φ konvex ist. Die Fälle, welche in Abbildung 2.6 zu sehen sind, sind substantielle B-Splines und damit \mathbf{n} -proper. Ist der konvexe Schnitt nur in einer Zelle enthalten, welche keine Eckzelle ist (siehe Abbildung 2.7), so ist der TPB-Spline nicht α -proper. Allerdings zeigt Beispiel 4.21, dass der entstehende lukB-Spline \mathbf{n} -proper ist. Auch Schnitte von Gebiet und Träger wie in Abbildung 2.9 erfüllen keines der Kriterien K1 und K2 auf Seite 30. Doch das Kondensieren führt dazu, dass in x -Richtung ein Intervall der kondensierten Git-

terweite in dem Schnitt liegt. Wie der entstehende Träger aussieht, verdeutlicht Abbildung 4.8.

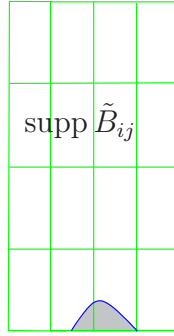


Abbildung 4.8: Kondensierter Träger

Es bleibt die Überprüfung konkaver Schnitte, welche keine vollständige Gitterzelle enthalten. Das sind letztendlich Schnitte wie in Abbildung 4.7 gezeigt.

1.Fall:

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Ecke des Trägers im Ursprung. Die den Rand beschreibende Funktion φ muss folgendes erfüllen:

- $\varphi(0) = a \cdot h_2$ und $\varphi(b \cdot h_1) = 0$ für $n \geq a, b \geq 1$.
- $a \cdot h_2 - \varphi(\xi_0) \leq L \cdot \xi_0$ für $0 < \xi_0 < b \cdot h_1$ und $n \geq a, b \geq 1$.
- $\varphi(\xi_0) - 0 \leq L \cdot (b \cdot h_1 - \xi_0)$ für $0 < \xi_0 < b \cdot h_1$ und $n \geq b \geq 1$.

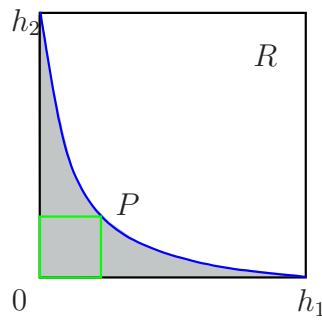


Abbildung 4.9: Darstellung der Rechtecke und des Schnittes für $a, b = 1$

Für beliebiges $0 < \xi_0 < b \cdot h_1$ gilt somit: $a \cdot h_2 - L \cdot \xi_0 \leq \varphi(\xi_0) \leq L \cdot (b \cdot h_1 - \xi_0)$.

Dies ist erfüllt, falls $\frac{a \cdot h_2}{b \cdot h_1} \leq L$ gilt. Andernfalls ist entweder $\varphi(0) > a \cdot h_2$ oder $\varphi(b \cdot h_1) < 0$.

Gesucht wird ein α , so dass für ein Rechteck $P \subset G_{ij}^\nu$ gilt: $\alpha|P| = (b \cdot h_1, a \cdot h_2)$. Sei $|P| = (\xi_0, a \cdot h_2 - L \cdot \xi_0)$. Dann muss

$$\begin{aligned}\alpha \xi_0 &= b \cdot h_1 \\ \alpha \cdot (a \cdot h_2 - L \cdot \xi_0) &= a \cdot h_2\end{aligned}$$

gelöst werden und damit folgt $\alpha = 1 + L \cdot \frac{b \cdot h_1}{a \cdot h_2}$.

Da $\frac{a \cdot h_2}{b \cdot h_1} \leq L$ sein muss, gilt $L \cdot \frac{b \cdot h_1}{a \cdot h_2} \geq 1$ und somit $\alpha \geq 2$ abhängig von L .

2. Fall:

Der letzte Fall, der untersucht werden muss, entspricht Abbildung 4.7(b). Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R = [0, a \cdot h_1] \times [0, r_2]$ für $1 \leq a \leq n_1$ und $0 < r_2 \leq n_2$.

Die den Rand beschreibende Funktion φ muss folgende Bedingungen erfüllen:

$$\varphi(0) = \varphi(b \cdot h_1) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\xi_0) = r_2 \quad \text{für ein } \xi_0 \in (0, b \cdot h_1), \quad 1 \leq b \leq a.$$

Abbildung 4.10 zeigt dies für das Beispiel aus Abbildung 4.7(b).

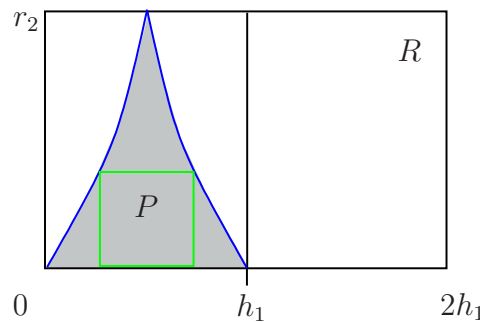


Abbildung 4.10: Darstellung der Rechtecke und des Schnittes für $a = 2$, $b = 1$

Aufgrund der Lipschitz-stetigkeit von φ gilt:

- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(0)| \leq L \cdot \xi_0$.
- $r_2 = |\varphi(\xi_0) - \varphi(b \cdot h_1)| \leq L \cdot (b \cdot h_1 - \xi_0)$.

Damit die Bedingungen dieses Falls erfüllt sind, muss $\frac{r_2}{L} \leq \xi_0 \leq b \cdot h_1 - \frac{r_2}{L}$ und somit $\frac{2r_2}{b \cdot h_1} \leq L$ gelten.

Der Graph von φ verläuft über den beiden Geraden

$$g(x) = r_2 - L \cdot (x - \xi_0) \text{ für } x > \xi_0 \quad \text{und} \quad f(x) = r_2 - L \cdot (\xi_0 - x) \text{ für } x < \xi_0.$$

Damit ergibt sich ein Dreieck, welches vollständig im Inneren des Schnittes liegt.

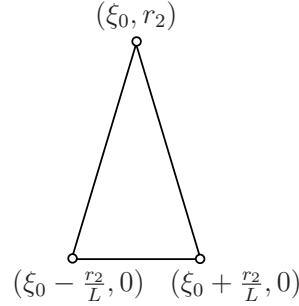


Abbildung 4.11: Randfreie Fläche

In diesem Dreieck lässt sich ein Rechteck P mit $|P| = (\frac{a \cdot h_1}{\alpha}, \frac{r_2}{\alpha}) < (\frac{2r_2}{L}, r_2)$ finden und somit gilt

$$\alpha > \max \left\{ 1, \frac{a \cdot h_1}{2r_2} \cdot L \right\} \quad \text{für} \quad 1 \leq a \leq n_1 \text{ und } 0 < r_2 \leq n_2.$$

Da $\frac{2r_2}{b \cdot h_1} \leq L$ sein muss, gilt $\alpha > a$ abhängig von L . □

Die Eigenschaft α -proper zu sein, hängt daher bei den lukB-Splines auch im bivariaten Fall nicht mehr von der Größe des Schnittes $\text{supp } \tilde{B}_{ij} \cap \bar{\Omega}$ ab.

Wie schon im univariaten Fall gibt es auch bivariate B-Splines, welche theoretisch weiter zusammengezogen werden könnten, wie zum Beispiel der Träger des B-Splines in Abbildung 4.12(a). Auch in Beispiel 4.21 und bei dem in Abbildung 4.7(b) gezeigten Träger wäre es möglich die Knotenabstände in y -Richtung zu verringern. Doch wie schon bei den univariaten B-Splines gilt, dass bei diesen *Rand-B-Splines* die Lage der Knoten außerhalb des Gebietes den Wert des normierten lukB-Splines nicht beeinflusst. Dies gilt, da die TPB-Splines Produkte der univariaten B-Splines sind und somit Korollar 4.5 auf die univariaten Anteile angewendet werden kann.

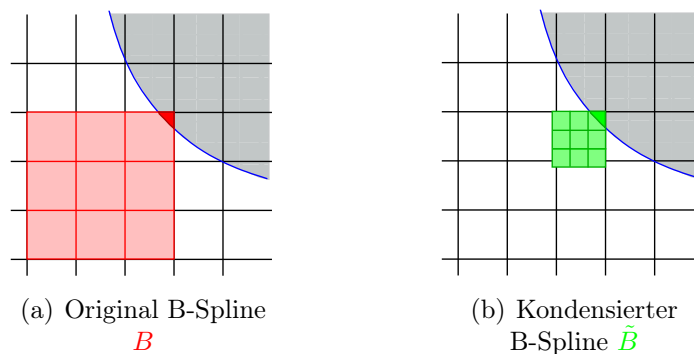


Abbildung 4.12: Rand-B-Spline

Für einige theoretische Resultate ist es hilfreich, nicht jeden einzelnen B-Spline mit eigenen Knoten identifizieren zu müssen. Da $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$, kann das Gebiet in Teilgebiete $\Omega_r := \Omega \cap V_r$, $r = 1, \dots, s$, aufgeteilt werden. Auf diesen Teilgebieten kann $\partial\Omega|_{\Omega_r}$ entweder bezüglich x oder y durch den Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion φ_r dargestellt werden. Durch eine bezogen auf die Gebietsvariable η geeignete Wahl der Feinheit des Gitters T soll eine lokale TP-Struktur erzeugt werden. Das Kondensieren wird zuerst auf den Teilgebieten betrachtet und dann zu einem Ganzen zusammengefügt. Um die notwendigen Bedingungen bestimmen zu können, wird zuerst ein Beispiel betrachtet.

Beispiel 4.25. Der Rand des in Abbildung 4.13(a) dargestellten Gebietsausschnittes kann durch eine konvexe Funktion $\varphi(x)$ beschrieben werden. Die Gitterlinien der Knotenfolge T_2 werden als Ebene j bezeichnet. Die lukB-Splines werden nach Definition 4.23 bestimmt. Hierbei entsteht auf den unterschiedlichen Ebenen j in x -Richtung eine einheitliche Knotenfolge. Dies wird in den Abbildungen 4.13(b) und 4.13(c) durch das rote und grüne Gitter angedeutet.

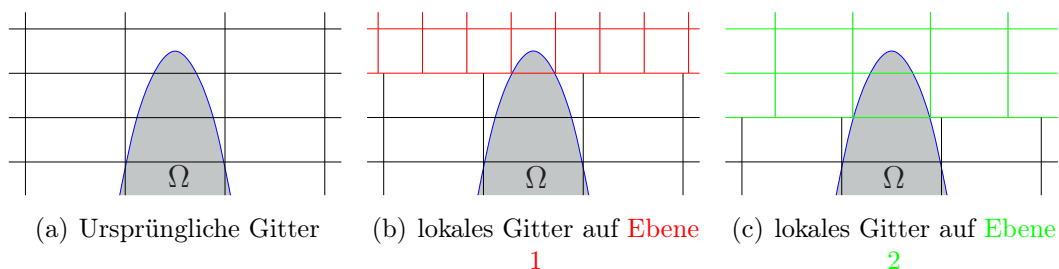


Abbildung 4.13: Lokale Gitterstruktur

Es entstehen somit auf den verschiedenen Ebenen unterschiedliche univariate kondensierte B-Splines in x -Richtung. Die B-Splines $b_{2,j}$ liegen entweder mit mehreren Knoten in dem Gebiet oder sind, wie in dem in Abbildung 4.13(b) rot

markierten Teil, Rand-B-Splines. Daher wird für alle $b_{2,j}$ die Anfangsknotenfolge T_2 beim Kondensieren beibehalten. \blacksquare

Dass die B-Splines in einer Koordinatenrichtung durch das Kondensieren unverändert bleiben, lässt sich durch die Gitterweite regeln. Denn für die Funktion, welche den Rand $\partial\Omega_r := \partial\Omega|_{\Omega_r}$ beschreibt und deren Graph in dem Rechteck $V_r = [a_1^r, b_1^r] \times [a_2^r, b_2^r]$ liegt, gilt nach Definition 3.1 bis auf Permutation der Koordinaten

$$a_2^r + \eta < \varphi_r(x) < b_2^r - \eta \quad \text{für } x \in [a_1^r, b_1^r].$$

Sei das Teilgebiet so, dass $\varphi : [a_1^r, b_1^r] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt. Falls $h_2 \leq \eta$ gewählt wird, so verändern sich die B-Splines in y -Richtung durch das Kondensieren nicht.

Kondensieren auf Ω_r

Die Struktur der lokalen Gitter wird nun exemplarisch auf einem $\Omega_r := V_r \cap \Omega$ untersucht, welches folgende *Grundform* hat:

$$\Omega_r = \{0 < y < \varphi_r(x), x \in [0, v_1]\} \quad (4.6)$$

mit $|\varphi_r(x_1) - \varphi_r(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$ und $V_r := [0, v_1] \times [0, v_2]$. Das Anfangsgitter sei so gewählt, dass

$$h_2 \leq \eta < \varphi_r(x) \quad \text{für alle } x \in [0, v_1].$$

Das bedeutet, dass in y -Richtung die ursprünglichen B-Splines bereits optimiert sind und nicht verändert werden.

Es wird zuerst der Fall betrachtet, dass φ_r eine konvexe Funktion ist. Aus dem Anfangsgitter $T = T_1 \otimes T_2$ ergibt sich auf jeder Ebene j von T_2 eine auf das Gebiet angepasste Knotenfolge T_1^j in x -Richtung. Diese entsteht wie in (4.1) durch folgende Konstruktion:

Sei $M_j := \cup_i \text{supp } B_{ij}$ und $\mathcal{T}_j := \{t_k \in \mathbb{R} : (t_k, s_j) \in \overline{\Omega}_r \text{ für } (k, j) \in I_\Omega\}$ für ein beliebiges festes j . Mit $r_2^j := \max\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \partial\Omega_r \cap M_j\}$ wird der größte Randpunkt von Ω_r in x -Richtung in dem Streifen M_j benannt. Außerdem sei $t_{\min}^j := \min(\mathcal{T}_j)$. Dann ist die *Knotenfolgen* T_1^j der *lokalen Grundgitter* bestimmt durch

$$T_1^j = \frac{h_1^j}{h_1} \cdot T_1 - \frac{h_1^j}{h_1} \cdot t_{\min}^j + \begin{cases} t_{\min}^j & \text{falls } \mathcal{T}_j \neq \emptyset \\ r_2^j & \text{falls } \mathcal{T}_j = \emptyset \end{cases}. \quad (4.7)$$

Hierbei ist $h_1^j \leq h_1$, der von j abhängige uniform kondensierte Knotenabstand. Die auf jeder Ebene von T_2 entstehenden Gitter werden *lokale Grundgitter*

$$T_j := T_1^j \otimes T_2 \quad \text{mit Gitterweite} \quad h_j := (h_1^j, h_2)$$

genannt.

Ohne die Anforderung der Konvexität ist die Konstruktion etwas komplizierter. Ein Träger kann mehrere Schnitte mit Ω haben. Für die gegebene Grundform könnte eine solche Konstellation wie in Abbildung 4.14 gegeben sein. Hier wird ein Stück eines Teilgebietes in Grundform (4.6) betrachtet. Der rot markierte Träger eines B-Splines auf Ebene $j = 2$ hat mehrere nicht zusammenhängende Schnitte mit dem Gebiet. Da $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ (siehe Definition 4.22), gibt es auf der Ebene j in dem Teilgebiet Ω_r endlich viele nicht zusammenhängende Schnitte. Die zugehörigen Teilstücke von Ω_r werden als $\Omega_r^{j,l}$ mit $l = 1, \dots, N_r(j)$ für $N_r(j) < \infty$ bezeichnet. Für jedes Teilstück kann eine optimierte Knotenfolge $T_1^{j,l}$ nach (4.7) bestimmt werden. Das *lokale Grundgitter* wird in diesem Fall durch T_j^l gekennzeichnet.

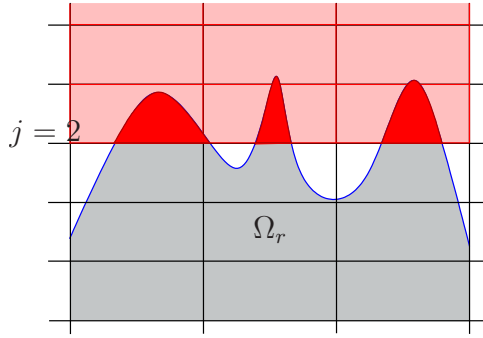


Abbildung 4.14: Nichtkonvexer Gebietsrand

Damit wird analog zu Definition 4.11 der Kondensierungsoperator definiert.

Definition 4.26. Sei Ω_r in der Grundform (4.6) gegeben. Sei $\mathcal{M}_r^{j,l} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $(i, j) \in I_{\Omega_r}$ und $l = 1, \dots, N_r(j)$ die affine Abbildung, welche die Knotenfolge T_1 auf die Knotenfolge $T_1^{j,l}$ nach (4.7) abbildet. Weiter seien $\Omega_r^{j,l}$ die Teilgebiete auf Ebene j .

1. Für $l \in \{1, \dots, N_r(j)\}$ mit $\text{supp } B_{ij} \cap \Omega_r^{j,l} \neq \emptyset$ wird der bivariate lokale Kondensierungsoperator $\mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}} : \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega_r^{j,l}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T_j^l, \Omega_r^{j,l})$ definiert durch

$$\mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}}[B_{ij}] := \mathcal{M}_r^{j,l}[b_{1,i}] b_{2,j} \cdot \chi_{[\Omega_r^{j,l}]}$$

mit

$$\chi_{[\Omega_r^{j,l}]}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } (x, y) \in \Omega_r^{j,l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}_r^{j,l}[b_{1,i}]$ die univariaten B-Splines zur Knotenfolge $T_1^{j,l}$ nach Definition 4.6.

2. Der bivariate normierte lokale Kondensierungsoperator ist definiert als

$$\mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}}^p[B_{ij}](x, y) := \frac{\mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}}[B_{ij}](x, y)}{\|\mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}}[B_{ij}]\|_{p,\Omega}} \quad \text{für } (x, y) \in \Omega_r.$$

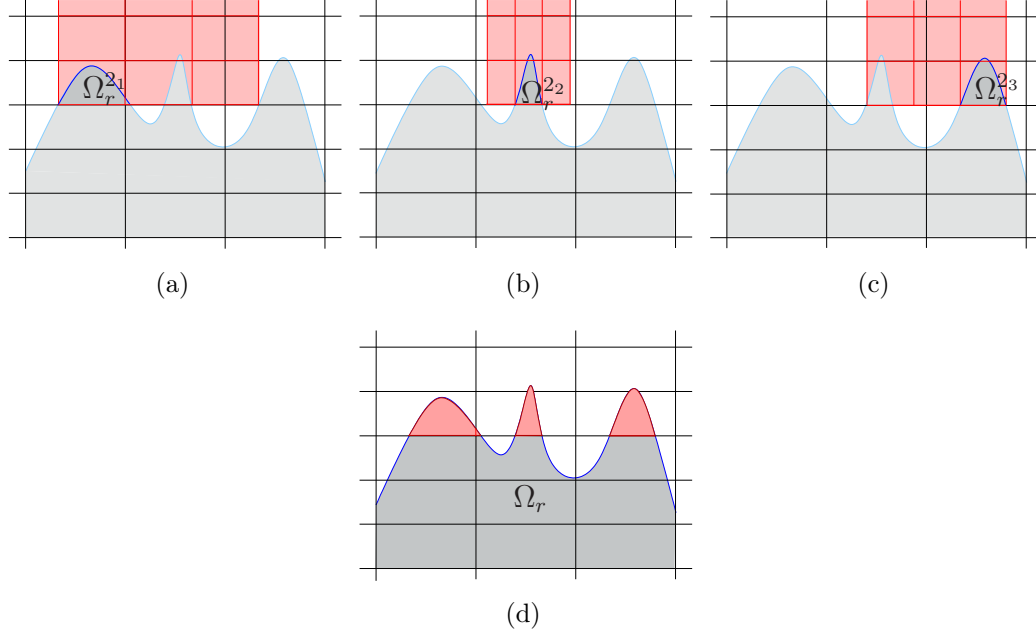


Abbildung 4.15: Kondensierte B-Splines

Wird Definition 4.26 auf den B-Spline aus Abbildung 4.14 angewendet, so entstehen drei neue lokal definierte B-Splines. In Abbildung 4.15(a)-4.15(c) sind die Träger der drei kondensierten B-Splines vor dem Beschränken auf die zugehörigen Teilgebiete illustriert. Das heißt, die B-Splines $\mathcal{M}_r^{2,l}[b_{1,i}] b_{2,2}$ für $l = 1, 2, 3$ sind abgebildet. In Abbildung 4.15(d) sind schließlich die durch den bivariaten lokalen Kondensierungsoperator entstehenden B-Splines zu sehen.

Satz 4.27. Sei $\Omega_r \subset \mathbb{R}^2$ in der Grundform (4.6) gegeben. Für $(i, j) \in I_{\Omega_r}$ und $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$ mit $G_{ij}^\nu = \Omega_r^{j,l} \cap \text{supp } B_{ij} \neq \emptyset$ gilt:

$$\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) = \mathcal{K}_{\Omega_r^{j,l}}^p[B_{ij}](x, y)$$

für $(x, y) \in \Omega_r$.

Beweis:

In den einzelnen univariaten Anteilen gilt mit Lemma 4.13 und Satz 4.7, dass diese gleich sind. \square

Damit ist der Kondensierungsoperator auf einem Gebiet in Grundform (4.6) bestimmt und geklärt, unter welchen Bedingungen die resultierenden normierten B-Splines mit den normierten lukB-Splines übereinstimmen. Mit diesen Ergebnissen kann der Kondensierungsoperator auf Gebieten mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ bestimmt werden.

Kondensieren auf Ω

Durch die a^3 -Invarianz der B-Splines und da $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ ist, existiert für jedes V_r eine a^3 -Abbildung $\mathcal{A}_r : V_r \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass $\mathcal{A}_r(\Omega_r)$ und $\mathcal{A}_r(T)$ in die Grundform (4.6) überführt werden. Dort kann der Kondensierungsoperator aus Definition 4.26 angewendet werden und anschließend wieder in die ursprüngliche Lage transformiert werden.

Da die Teilgebiete erst durch die affine Abbildung in die Grundform überführt werden, muss die Bedingung $h_2 \leq \eta$ an das Anfangsgitter ein wenig variiert werden. Außerdem soll für $Z_{kl} \subset V_r$ mit $(k, l) \in K_\Omega$ auch jeder zusammenhängende Schnitt G_{ij}^ν mit $Z_{kl} \cap G_{ij}^\nu \neq \emptyset$ für $(i, j) \in I_\Omega$ und $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$ vollständig in V_r enthalten sein. Dies kann über die Gitterweite h gesteuert werden. Die Gitterweite h sollte so fein gewählt werden, dass der Splineraum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ folgender Definition genügt.

Definition 4.28. *Gegeben sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und den Parametern s, η und L . Der Splineraum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ wird k^2 -Raum (kondensierungskompatibel) genannt, wenn die Gitterweite so gewählt ist, dass gilt:*

- a) $\max\{h_1, h_2\} \leq \eta$.
- b) *Für jedes $(k, l) \in K_\Omega$ existiert ein $r \in \{1, \dots, s\}$, so dass für $Z_{kl}^\Omega \subset V_r$ auch $\bar{G}_{kl} \subset V_r$ gilt. Hierbei ist $Z_{kl}^\Omega := Z_{kl} \cap \Omega$ und die Menge $\bar{G}_{kl} := \bigcup_{(i,j) \in I_{kl}} G_{ij}^\nu$ für $I_{kl} := \{(i, j) \in I_\Omega \mid Z_{kl}^\Omega \subset G_{ij}^\nu \text{ für } \nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}\}$.*

Die durch eine a^3 -Abbildung in die Grundform gedrehte und verschobene Menge wird durch ein $\hat{}$ gekennzeichnet, das heißt,

$$\mathcal{A}_r(\Omega_r) := \hat{\Omega}_r.$$

Die Indexmenge der dort wirksamen B-Splines sei $(\hat{i}, \hat{j}) \in I_{\hat{\Omega}_r}$. Somit werden die Teilgebiete auf Ebene \hat{j} in der abgebildeten Menge durch $\hat{\Omega}_r^{\hat{j}, l}$ bezeichnet. Hierbei ist \hat{j} entweder der Index i oder j des ursprünglichen B-Splines. Das ursprüngliche Teilgebiet ist somit entweder $\Omega_r^{j, l}$ oder $\Omega_r^{i, l}$ und wird der Einfachheit halber durch $\Omega_r^{\hat{j}, l}$ benannt.

Der Kondensierungsoperator über dem gesamten Gebiet kann für k^2 -Räume angegeben werden.

Definition 4.29. Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Die Gitterweite h des Anfangsgitters T sei so gewählt, dass $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ ein k^2 -Raum ist. Weiter seien $\mathcal{A}_r : V_r \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r = 1, \dots, s$, a^3 -Abbildungen, welche Ω_r in die Grundform (4.6) abbilden. Für $(i, j) \in I_{\Omega_r}$ beziehungsweise $(\hat{i}, \hat{j}) \in I_{\hat{\Omega}_r}$ und $l \in \{1, \dots, N_r(j)\}$ mit $\hat{\Omega}_r^{j,l} \cap \text{supp}(B_{ij} \circ \mathcal{A}_r^{-1}) \neq \emptyset$ wird der normierte Kondensierungsoperator definiert als

$$\mathcal{K}_{ij,rl}^p[B_{ij}] := \mathcal{A}_r^{-1} \left(\mathcal{K}_{\hat{\Omega}_r^{j,l}}^p[\mathcal{A}_r(B_{ij})] \right) = \mathcal{K}_{\hat{\Omega}_r^{j,l}}^p[B_{ij} \circ \mathcal{A}_r^{-1}] \circ \mathcal{A}_r.$$

Korollar 4.30. Für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und zugehörige k^2 -Splineräume $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ gilt:

Die normierten lukB-Splines nach Definition 4.23 und die durch Anwendung des normierten Kondensierungsoperators entstehenden B-Splines sind über Ω gleich.

Beweis:

Aufgrund von Definition 4.28 ist jeder Teilschnitt G_{ij}^ν in einem der Rechtecke V_r und damit in einem Teilgebiet $\Omega_r^{j,l}$ enthalten. Außerdem gilt nach Satz 4.27 $\mathcal{K}_{\hat{\Omega}_r^{j,l}}^p[\mathcal{A}_r(B_{ij})] = \mathcal{A}_r(\tilde{B}_{ij}^{\nu,p})$ für $(i, j) \in I_{\Omega_r}$ beziehungsweise $(\hat{i}, \hat{j}) \in I_{\hat{\Omega}_r}$ und $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$ mit $\hat{\Omega}_r^{j,l} \cap \text{supp}(B_{ij} \circ \mathcal{A}_r^{-1}) = \hat{G}_{ij}^\nu$. \square

Die aus dem normierten Kondensierungsoperator resultierenden B-Splines werden im Weiteren der Einfachheit halber als *normierte lukB-Splines* $\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}$ mit $(i, j) \in I_\Omega$ bezeichnet.

Wird ein Punkt $(x, y) \in \Omega$ betrachtet, so kann unter anderem aufgrund der a^3 -Invarianz von B-Splines im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass $(x, y) \in \Omega_r$ ist für ein Ω_r in Grundform. Das bedeutet, dass angenommen wird, dass $b_{2,j}$ unverändert bleibt. Es ist dann

$$\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) := \frac{\tilde{b}_{1,i}^\nu(x) b_{2,j}(y) \cdot \chi_{[G_{ij}^\nu]}(x, y)}{\|\tilde{b}_{1,i}^\nu(\cdot) b_{2,j}(\cdot) \cdot \chi_{[G_{ij}^\nu]}(\cdot, \cdot)\|_{p,\Omega}}. \quad (4.8)$$

Hierbei wird die kondensierte Knotenfolge von $\tilde{b}_{1,i}^\nu$ über die Teilmenge $\Omega_r^{j,l}$ mit $(x, y) \in \Omega_r^{j,l} \cap G_{ij}^\nu$ berechnet. Diese Knotenfolgen können sich auf den verschiedenen Ebenen j unterscheiden.

Die grundlegenden Eigenschaften der klassischen TPB-Splines bleiben für die normierten lukB-Splines erhalten.

Korollar 4.31. Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$.

1. Die normierten lukB-Splines sind linear unabhängig.
2. Für die normierten lukB-Splines gilt, dass $\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) \geq 0$ für alle (x, y) und i, j .

Beweis:

1. Lineare Unabhängigkeit

Sei $(x, y) \in \Omega$, damit ist $(x, y) \in \Omega_r$ für ein $r \in \{1, \dots, s\}$. Sei daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{B}_{ij}^{\nu,p}$ von der Form (4.8).

Da $(x, y) \in G_{ij}^\nu$ für ein $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$ und $(i, j) \in I_\Omega$ mit $(x, y) \in \text{supp } B_{ij}$ ist, gilt $\chi_{[G_{ij}^\nu]}(x, y) = 1$. Weiter gilt $\|\tilde{b}_{1,i}^\nu(\cdot) b_{2,j}(\cdot) \chi_{[G_{ij}^\nu]}(\cdot, \cdot)\|_{p,\Omega} = \|\tilde{b}_{1,i}^\nu b_{2,j}\|_{p,G_{ij}^\nu}$. Seien $i = 1, \dots, n_1$ und $j = 1, \dots, n_2$ die Indizes aus $(i, j) \in I_\Omega$ mit $(x, y) \in \text{supp } B_{ij}$.

Zu zeigen ist: $\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) \alpha_{ij} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ij} = 0$ für alle i, j

Die kondensierten Knotenfolgen der univariaten Anteile $\tilde{b}_{1,i}^\nu$ können abhängig von j unterschiedlich sein. Diese Abhängigkeit wird hier durch den Index j gekennzeichnet, also durch $\tilde{B}_{ij}^\nu = \tilde{b}_{1,i}^{\nu,j} b_{2,j}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) \alpha_{ij} &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(x) b_{2,j}(y)}{\|\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(\cdot) b_{2,j}(\cdot)\|_{p,G_{ij}^\nu}} \alpha_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n_2} b_{2,j}(y) \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(x)}{\|\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(\cdot) b_{2,j}(\cdot)\|_{p,G_{ij}^\nu}} \alpha_{ij} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) \alpha_{ij} = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{j=1}^{n_2} b_{2,j}(y) \left(\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(x)}{\|\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j} b_{2,j}\|_{p,G_{ij}^\nu}} \alpha_{ij} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n_1} \frac{\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j}(x)}{\|\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j} b_{2,j}\|_{p,G_{ij}^\nu}} \alpha_{ij} = 0 \quad \text{für alle } j \\ \Leftrightarrow &\tilde{\alpha}_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j \end{aligned}$$

mit $\tilde{\alpha}_{ij} := \frac{\alpha_{ij}}{\|\tilde{b}_{1,i}^{\nu,j} b_{2,j}\|_{p,G_{ij}^\nu}}$.

2. Wie im univariaten Fall erhalten die ausgeführten Änderungen die Positivität der B-Splines. \square

Um die Lesbarkeit im Folgenden zu vereinfachen, werden einige Notationen eingeführt.

Notationen 4.32.

Jedes Tripel $\{i, j, \nu\}$ mit $(i, j) \in I_\Omega$ und $\nu \in \{1, \dots, u_{ij}\}$ wird einem Index $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ mit $\tilde{m} := \sum_{(i,j) \in I_\Omega} u_{ij}$ zugeordnet ($\{i, j, \nu\} \leftrightarrow k$). Damit ist

$$\tilde{B}_{ij}^{\nu,p} = \tilde{B}_k^p \quad \text{und} \quad G_{ij}^\nu = G_k.$$

Durch das Einschränken der lukB-Splines gilt $\text{supp } \tilde{B}_k = G_k$; jedoch sind in dem Zusammenhang mit der Eigenschaft, dass die Träger α -proper sind, die kondensierten Knoten von Bedeutung. Deshalb wird mit $\text{supp}_\boxplus \tilde{B}_k$ der Träger vor der Multiplikation mit $\chi_{[G_k]}$ definiert. Die Menge $\{\tilde{B}_k^p\}_{k=1}^{\tilde{m}}$ bildet eine Basis für den uniform kondensierten Splineraum

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega) := \text{span}\{\tilde{B}_k^p, k = 1, \dots, \tilde{m}\}$$

und es gilt

$$\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega) \subset \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega) \subseteq \hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega), \quad (4.10)$$

wobei $\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ den optimalen Splineraum über einem Gebiet Ω bezeichnet (siehe Abschnitt 2.3.2). Ein uniform kondensierter Spline aus $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$s(x, y) = \sum_{(i,j) \in I_\Omega} \sum_{\nu=1}^{u_{ij}} f_{ij} \tilde{B}_{ij}^{\nu,p}(x, y) = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \tilde{B}_k^p(x, y). \quad (4.11)$$

Die Gitterweite zu dem normierten lukB-Spline \tilde{B}_k^p ist $h_k = (h_{1,k}, h_{2,k})$.

Die Zellen des uniform kondensierten Splineraumes $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ werden mit \tilde{Z}_l für $l \in \tilde{K}_\Omega := \{l \in \mathbb{Z} : \tilde{Z}_l \cap \Omega \neq \emptyset\}$ gekennzeichnet. Aus einer Zelle Z_r , $r \in K_\Omega$ des Anfangsgitters entsteht nicht direkt die Zelle \tilde{Z}_l . Es gibt zwei Punkte, die beachtet werden müssen:

- Die lokalen Grundgitter können sich überlappen (siehe Abbildung 4.13).
- Eine Zelle Z_r kann mehrere nicht zusammenhängende Schnitte mit Ω enthalten.

Seien S_r^τ , $\tau = 1, \dots, u_\tau$ für $u_\tau \in \mathbb{N}$ die einzelnen zusammenhängenden Schnitte der Zelle Z_r mit Ω und $K_r^\tau := \{k \in \{1, \dots, \tilde{m}\} : S_r^\tau \cap G_k \neq \emptyset\}$. Dann wird

mit \tilde{Z}_l , $l \in \tilde{K}_\Omega$, die kleinste kondensierte Zelle mit $S_r^\tau \subset \tilde{Z}_l$ bezeichnet. Der Seitenlängenvektor wird definiert als

$$|\tilde{Z}_l| = \min_{k \in K_r^\tau} \{h_k\} =: (h_1^l, h_2^l).$$

4.2.2 Stabilität

Um zeigen zu können, dass die normierten lukB-Splines wirklich eine stabile Basis bilden, werden passende duale Funktionale benötigt. Zu den lukB-Spline kann analog zu Satz 2.27 ein bivariates de Boor-Fix Funktional bestimmt werden, da das de Boor-Fix Funktional auch zu verschiedenen Knotenvektoren in den verschiedenen Richtungen definiert werden kann. Dies ist notwendig, denn die univariaten Anteile der normierten lukB-Splines aus Definition 4.29 beziehungsweise 4.26 besitzen jeweils ihre eigenen Knotenfolgen.

Lemma 4.33. *Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Sei $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ und $\xi \in \text{supp } \tilde{B}_k \cap \Omega$.*

1. *Zu den lukB-Splines \tilde{B}_k wird durch*

$$\tilde{\lambda}_k(f) := \frac{1}{(\mathbf{n} - 1)!} \sum_{\alpha < \mathbf{n}} (-1)^{|\mathbf{n} - 1 - \alpha|} \tilde{\psi}_k^{(\mathbf{n} - 1 - \alpha)}(\xi) f^{(\alpha)}(\xi)$$

mit $\tilde{\psi}_k^{\mathbf{n}}(\xi) := \tilde{\psi}_{1,k}^{n_1}(\xi_1) \cdot \tilde{\psi}_{2,k}^{n_2}(\xi_2)$, $(\mathbf{n} - 1)! := (n_1 - 1)! (n_2 - 1)!$ ein duales de Boor-Fix Funktional definiert. Hierbei sind $\tilde{\psi}_{1,k}^{n_1}$ und $\tilde{\psi}_{2,k}^{n_2}$ bezüglich der Knoten der univariaten Anteile des lukB-Splines \tilde{B}_k definiert (analog zu Lemma 4.15).

2. *Für die normierten lukB-Splines \tilde{B}_k^p der Ordnung \mathbf{n} wird durch*

$$\Lambda_k := \|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_k$$

ein duales Funktional definiert.

Beweis:

1. Analog zu dem Fall der TPB-Splines gilt mit Lemma 4.15

$$\tilde{\lambda}_k(\tilde{B}_j) = \tilde{\lambda}_{1,k}(\tilde{b}_{1,j}) \cdot \tilde{\lambda}_{2,k}(\tilde{b}_{2,j}) = \delta_{k,j}.$$

2. Es gilt

$$\Lambda_k(\tilde{B}_j^p) = \|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \tilde{\lambda}_k\left(\frac{\tilde{B}_j}{\|\tilde{B}_j\|_{p,\Omega}}\right) = \frac{\|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega}}{\|\tilde{B}_j\|_{p,\Omega}} \tilde{\lambda}_k(\tilde{B}_j).$$

Mit Teil 1 folgt $\Lambda_k(\tilde{B}_j^p) = 0$ für $k \neq j$. Für $k = j$ ergibt sich

$$\Lambda_k(\tilde{B}_k^p) = \frac{\|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega}}{\|\tilde{b}_k\|_{p,\Omega}} = 1.$$

□

Mit Hilfe dieser Funktionale können nun zwei Stabilitätsresultate erzielt werden.

Satz 4.34. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Weiter sei $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ ein k^2 -Raum, das heißt, h sei hinreichend fein. Es existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ mit $s = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_k^\infty f_k$ nach (4.11) gilt:*

$$c \|F\|_\infty \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} |s(x,y)| \leq C \|F\|_\infty.$$

Die Konstante sind nur abhängig von \mathbf{n} und der Lipschitzkonstanten L des Gebietes Ω . Hierbei ist $\|F\|_\infty := \max_k |f_k|$.

Beweis:

Viele Argumente verlaufen analog zu dem univariaten Fall und werden daher nicht vollständig wiederholt.

Es gilt

$$\sup_{(x,y) \in \Omega} |s(x,y)| \leq \sup_{(x,y) \in \Omega} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} \frac{|\tilde{B}_k|}{\|\tilde{B}_k\|_{\infty,\Omega}} \right) \cdot \|F\|_\infty \leq (n_1 \cdot n_2) \cdot \|F\|_\infty.$$

Damit ist die Abschätzung nach oben unabhängig von Ω und T möglich.

Es bleibt zu zeigen, dass ein $c > 0$ existiert, so dass

$$c \|F\|_\infty \leq \max_{(x,y) \in \Omega} |s(x,y)| = \|s\|_{\infty,\Omega}.$$

Sei $\xi_k \in G_k = \text{supp } \tilde{B}_k = \text{supp } \tilde{B}_k \cap \Omega$ für $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$. Es gilt

$$|f_k| = |\Lambda_k(s)| \leq \frac{1}{(\mathbf{n} - 1)!} \|\tilde{B}_k\|_{\infty,\Omega} \max_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |\tilde{\psi}_k^{(\mathbf{n}-1-\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)| \sum_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |s^{(\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)|.$$

Für $\xi_k \in G_k$ gibt es eine Gitterzelle \tilde{Z}_l , $l \in \tilde{K}_\Omega$, mit $\xi_k \in \tilde{Z}_l$. Da $s|_{\tilde{Z}_l} \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}(\tilde{Z}_l)$ ist, sei wie auch im univariaten Fall: $\sum_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |s^{(\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)| =: \|s\|_{\xi_k}$.

Nach Lemma 4.24 sind alle lukB-Splines α -proper mit α unabhängig von der Größe des Schnittes mit Ω und unabhängig von T . Die folgenden Argumente verlaufen analog zu dem Beweis von Satz 4.18. Auch im Bivariaten ist Λ_k a^3 -invariant. Daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_k = [0, 1] \times [0, 1]$ und $\xi_k \in P_k \subset \tilde{Z}_l \subseteq R_k$ mit $|P_k| \cdot \alpha = |R_k|$ für $\alpha = \alpha(\mathbf{n}, L)$ sei so gewählt, dass $\|s\|_{\xi_k} \leq c'_{\mathbf{n},L} \|s\|_{\infty, P_k}$. Damit gilt

$$|f_k| \leq \frac{c'_{\mathbf{n},L}}{(n-1)!} \|\tilde{B}_k\|_{\infty, \Omega} \cdot \max_{\nu < \mathbf{n}} \|\tilde{\psi}_k^{(\nu)}\|_{\infty, R_k} \cdot \|s\|_{\infty, P_k}.$$

Da $G_k \subset R_k$ ist, gilt $\|\tilde{B}_k\|_{\infty, \Omega} = \|\tilde{B}_k\|_{\infty, G_k} \leq \|\tilde{B}_k\|_{\infty, R_k}$. Weiter gilt

$$\|\tilde{B}_k\|_{\infty, R_k} = \|\tilde{b}_{1,k} \tilde{b}_{2,k} \chi_{[G_k]}\|_{\infty, R_k} \leq \|\tilde{b}_{1,k} \tilde{b}_{2,k}\|_{\infty, R_k} = \|\tilde{b}_{1,k}\|_{\infty, [0,1]} \|\tilde{b}_{2,k}\|_{\infty, [0,1]}.$$

Durch Anwendung von Lemma 4.17 auf die univariaten Anteile von \tilde{B}_k und $\tilde{\psi}_k^{(\nu)}$ folgt

$$|f_k| \leq c'_{\mathbf{n},L} \|s\|_{\infty, P_k} \leq c'_{\mathbf{n},L} \|s\|_{\infty, \Omega} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}.$$

Somit ist gezeigt, dass eine Konstante $c_{\mathbf{n},L}$ existiert, sodass

$$c_{\mathbf{n},L}^{-1} \left(\max_k |f_k| \right) \leq \|s\|_{\infty, \Omega}.$$

□

Lemma 4.19 ist für Gebiete beliebiger Dimension $d < \infty$ gültig. In dem Beweis muss die Dimension der a^3 -Abbildung angepasst werden. Das heißt, es wird $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ betrachtet mit

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t_1 \\ \vdots \\ \alpha_d t_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \end{pmatrix}.$$

Bei der Substitution in $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ ergibt sich damit statt des Faktors $|\alpha|$ der Faktor $|\alpha_1| \cdots |\alpha_d| = |\det(\mathcal{A}')|$, wobei \mathcal{A}' die Ableitung von \mathcal{A} sei.

Lemma 4.35. *Sei $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d < \infty$, und $\mathcal{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{A}(t) = \alpha * t + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^d$ eine a^3 -Abbildung, welche $R \subset \mathbb{R}^d$ auf Ω abbildet. Für $\hat{s} := \mathcal{A}(s) \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(\mathcal{A}(T), R)$ analog zu Lemma 4.19 gilt*

$$\|F\|_p = |\det(\mathcal{A}')|^{\frac{1}{p}} \|\hat{F}\|_p \quad \text{und} \quad \|s\|_{p,\Omega} = |\det(\mathcal{A}')|^{\frac{1}{p}} \|\hat{s}\|_{p,R}.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas lassen sich alle Schritte aus dem Beweis von Satz 4.20 auf den bivariaten Fall übertragen. Im Wesentlichen verändern sich zwei Dinge, welche aus dem Beweis von Satz 4.34 ersichtlich werden.

- Die Konstante der oberen Abschätzung wird zu $(n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{q}}$.
- Bei der Abschätzung nach unten entsteht der Faktor $(n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{p}}$ und eine Abhängigkeit von \mathbf{n} , L und p .

Satz 4.36. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ ein k^2 -Raum. Es existieren Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle Splines $s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ gilt:*

$$c \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega} \leq C \|F\|_p.$$

Hierbei sind die Konstanten nur von \mathbf{n} , L und p abhängig.

Beweis:

Sei $(x, y) \in \Omega$. Für jeden beliebigen Punkt aus Ω liefern maximal $n_1 \times n_2$ normierte lukB-Splines einen Beitrag. Mittels der Hölderschen Ungleichung für Summen gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |s(x, y)| &\leq \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{B}_k^p(x, y) \cdot \chi_{\text{supp } \tilde{B}_k}(x, y)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{B}_k^p(x, y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |\chi_{\text{supp } \tilde{B}_k}(x, y)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{B}_k^p(x, y)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

wobei p und q zueinander Hölder-konjugiert sind. Für die Abschätzung in der L_p -Norm des Splines folgt somit

$$\begin{aligned} \|s\|_{p,\Omega} &= \left(\int_{\Omega} |s(x, y)|^p d(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (n_1 \cdot n_2)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k \tilde{B}_k^p(x, y)|^p \right)^{\frac{p}{p}} d(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k|^p \underbrace{\int_{\Omega} (\tilde{B}_k^p(x, y))^p d(x, y)}_{=1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{q}} \|F\|_p. \end{aligned}$$

Es bleibt die Abschätzung nach unten. Es soll erneut ausgenutzt werden, dass $|f_k| = |\Lambda_k(s)|$ gilt.

Alle lukB-Splines sind α -proper (siehe Definition 2.36) mit α abhängig von \mathbf{n} und L . Damit existieren wie schon bei dem Beweis von Satz 4.34 Rechtecke R_k und P_k mit $\alpha|P_k| = |R_k| := (r_1, r_2)$. Für P_k gilt weiter, dass eine Zelle $\tilde{Z}_l \subset \text{supp}_{\boxplus} \tilde{B}_k$ mit $l \in \tilde{K}_{\Omega}$ (siehe Notation 4.32) existiert, so dass $P_k \subset \tilde{Z}_l$. Das Rechteck R_k und $\text{supp}_{\boxplus} \tilde{B}_k$ haben einen Eckpunkt gemeinsam. Dies sei aufgrund von Symmetrien ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Knoten \tilde{t}_k .

Im Fall der L_{∞} -Norm konnte ausgenutzt werden, dass diese skalierungsinvariant ist, und somit R_k ohne Probleme auf $[0, 1] \times [0, 1]$ skalierbar ist. Für $\mathcal{A}_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

mit $\mathcal{A}_k(x, y) = \begin{pmatrix} r_1 x \\ r_2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{t}_{1,k} \\ \tilde{t}_{2,k} \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(0, 0) &= \tilde{t}_k, & \mathcal{A}_k(1, 1) &= \tilde{t}_k + |R_k|, \\ \mathcal{A}_k(0, 1) &= \tilde{t}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix}, & \mathcal{A}_k(1, 0) &= \tilde{t}_k + \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit $\mathcal{A}_k([0, 1] \times [0, 1]) = R_k$. Sei \hat{F} der Koeffizientenvektor von $\mathcal{A}(s)$, dann gilt für die L_p -Normen nach Lemma 4.35

$$c \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega} \Leftrightarrow c \|\hat{F}\|_p \leq \|\mathcal{A}(s)\|_{p,\mathcal{A}^{-1}(\Omega)}.$$

Daher sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_k = [0, 1] \times [0, 1]$ und $\tilde{t}_k = 0$.

Sei $\xi_k \in G_k$ für $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$. Für die Koeffizienten f_k gilt

$$|f_k| = |\Lambda_k(s)| \leq \frac{1}{(\mathbf{n} - 1)!} \|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \max_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |\tilde{\psi}_k^{(\mathbf{n}-1-\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)| \sum_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |s^{(\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)|.$$

Wie schon vorher entspricht die Summe der Beträge der Ableitungen an der Stelle ξ_k auf dem Raum der Polynome einer Norm. Für $\xi_k \in G_k$ existiert eine Zelle \tilde{Z}_l , so dass $\xi_k \in G_k \cap \tilde{Z}_l$. Da $s|_{G_k \cap \tilde{Z}_l} \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}(G_k \cap \tilde{Z}_l)$ ist, ist die Definition $\sum_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |s^{(\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)| =: \|s\|_{\xi_k}$ möglich.

Es gilt:

1.) Das Rechteck P_k hat die Größe $|P_k| = (\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$. Wird $\xi_k \in P_k \subset \{G_k \cap \tilde{Z}_l\}$ gewählt, so gilt $\|s\|_{\xi_k} \leq c_{\mathbf{n},L,p} \|s\|_{p,P_k}$.

2.) Da $G_k \subset [0, 1] \times [0, 1]$ ist, gilt $\|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \leq \|\tilde{B}_k\|_{\infty,R_k}$. Da weiter $\xi_k \in R_k$ gilt, folgt

$$\|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \max_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} |\tilde{\psi}_k^{(\mathbf{n}-1-\boldsymbol{\nu})}(\xi_k)| \leq \|\tilde{B}_k\|_{\infty,R_k} \max_{\boldsymbol{\nu} < \mathbf{n}} \|\tilde{\psi}_k^{(\mathbf{n}-1-\boldsymbol{\nu})}\|_{\infty,R_k} \leq (\mathbf{n} - 1)!.$$

Aufgrund der lokalen TP-Struktur gilt $\|\tilde{B}_k\|_{\infty,R_k} \leq \|\tilde{b}_{1,k}\|_{\infty,[0,1]} \cdot \|\tilde{b}_{2,k}\|_{\infty,[0,1]}$. Da $\tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_{1,k} \cdot \tilde{\psi}_{2,k}$, ergibt sich die letzte Abschätzung durch $(\mathbf{n} - 1)!$ über die Anwendung von Lemma 4.17 auf die einzelnen Faktoren.

Somit folgt für alle $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$

$$|f_k| \leq c_{\mathbf{n},L,p} \cdot \|s\|_{p,P_k}.$$

Für P_k mit $k \in \{1, \dots, \tilde{m}\}$ gilt, dass sich höchstens $n_1 \cdot n_2$ Rechtecke überschneiden, und somit für die Abschätzung nach unten

$$\|F\|_p^p = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} |f_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\tilde{m}} (c_{\mathbf{n},L,p} \cdot \|s\|_{p,P_k})^p \leq (n_1 \cdot n_2) \cdot c_{\mathbf{n},L,p}^p \|s\|_{p,\Omega}^p.$$

Das heißt, für $c'_{\mathbf{n},L,p} := \left((n_1 \cdot n_2)^{\frac{1}{p}} \cdot c_{\mathbf{n},L,p} \right)^{-1}$ gilt

$$c'_{\mathbf{n},L,p} \|F\|_p \leq \|s\|_{p,\Omega}.$$

□

4.2.3 Approximation

Es wird untersucht, ob das Kondensieren, welches bei Gebieten mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ zu einer stabilen Basis führt, auch einen Splineraum mit zufriedenstellenden Approximationseigenschaften erzeugt. Die Probleme bei der klassischen TP-Splineapproximation wurden in Kapitel 2 erläutert. Bezogen auf die Approximationskraft wurde unter anderem in Beispiel 2.30 aufgezeigt, dass über Lipschitzgraph Gebieten eine Abhängigkeit von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen besteht.

Bevor die theoretischen Resultate gegeben werden, soll das Beispiel 2.30 nun auf Basis der normierten lukB-Splines untersucht werden.

Beispiel 4.37. Gegeben sei das Lipschitzgraph Gebiet ($\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$)

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq |x|\}$$

und das Anfangsgitter $T = T_1 \otimes T_2$ wie in Beispiel 2.30. Das lokale uniforme Kondensieren führt zu dem in Abbildung 4.16 abgebildeten Gitter, wobei hier nur die Zellen \tilde{Z}_l für $l \in \tilde{K}_\Omega$ dargestellt werden.

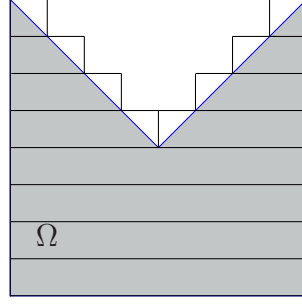


Abbildung 4.16: Lokal uniform kondensiertes Gitter

Da $\mathbf{n} = (1, 1)$ ist, ist auf jeder Zelle nur ein B-spline aktiv und für

$$f(x, y) := \begin{cases} y & y \geq 0, x \geq 0 \\ -y & y \geq 0, x \leq 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

gilt somit

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} = \frac{h_2}{2}.$$

Es soll

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} \leq C \cdot (h_1 \|\partial_1 f\|_{\infty, \Omega} + h_2 \|\partial_2 f\|_{\infty, \Omega}) = C \cdot h_2$$

gelten. Für die normierten lukB-Splines ist dies für $C = 1/2$ unabhängig von h_2 erfüllt. ■

In dem Beispiel ist die Konstante von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen unabhängig. Bevor dies allgemeiner gezeigt werden kann, sind einige Überlegungen notwendig.

Um den Fehler abschätzen zu können, der bei der Approximation von Funktionen $f \in W_p^n(\Omega)$ entsteht, wird ein Quasiinterpolant benötigt. Zwar existieren zu den normierten lukB-Splines duale Funktionale, welche durch Skalierung der de Boor-Fix Funktionale entstehen, sie können aber nur auf Funktionen angewendet werden, welche $(\mathbf{n} - 1)$ -mal stetig differenzierbar sind. Dies ist eine zu große Einschränkung. Daher wird zuerst eine orthogonale Projektion auf $\mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ bestimmt, über die dann ein beschränktes Funktional auf L_1 definiert werden kann.

Da alle lukB-Splines α -proper sind, gibt es in jedem Träger $\text{supp } \tilde{B}_k = G_k$ ein Rechteck P_k mit $|P_k| = (p_1, p_2)$, welches vollständig in $\tilde{Z}_l \cap G_k$ für eine Zelle $\tilde{Z}_l \subset \text{supp}_{\boxplus} \tilde{B}_k$ mit $l \in \tilde{K}_{\Omega}$ (siehe Notationen 4.32) liegt. Damit gilt aber auch, dass es in jeder Zelle \tilde{Z}_l mit $l \in \tilde{K}_{\Omega}$ ein solches Rechteck gibt.

Seien $\{l_k^{\nu} \in L_1(P_k) : \nu < \mathbf{n}\}$ die normierten Legendre-Polynome über P_k , welche

durch das Tensorprodukt der univariaten Legendre-Polynome entstehen. Für diese gilt mit $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$

$$\langle l_\beta, l_\gamma \rangle := \int_{P_k} l_\beta l_\gamma = \delta_{\beta, \gamma}.$$

Über P_k wird für Funktionen $f \in L_1(P_k)$ eine L_2 -Approximation basierend auf den normierten Legendre-Polynomen durch

$$\hat{f} := \sum_{\nu < \mathbf{n}} \langle f, l_k^\nu \rangle l_k^\nu$$

definiert.

Mit dieser Konstruktion kann ein beschränktes Funktional definiert werden.

Satz 4.38. *Sei Λ_k das zu den normierten lukB-Splines duale Funktional nach Lemma 4.33. Für $\xi_k \in P_k$ wird durch*

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_k(f) &:= \Lambda_k(\hat{f}) = \|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega} \tilde{\lambda}_k \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} \langle f, l_k^\nu \rangle l_k^\nu \right) \\ &= \|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega} \int_{P_k} \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} \tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) l_k^\nu \right) f \\ &= \|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega} \int_{P_k} q_k f \end{aligned}$$

ein Funktional von $L_1(P_k)$ nach \mathbb{R} definiert. Hierbei ist $\sum_{\nu < \mathbf{n}} \tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) l_k^\nu =: q_k$ ein Polynom.

Das Funktional $\tilde{\Lambda}_k$ ist zu den normierten lukB-Splines dual und durch

$$|\tilde{\Lambda}_k(f)| \leq c_{\mathbf{n}, p, \alpha} \|f\|_{p, P_k}$$

beschränkt.

Beweis:

1. Das Funktional ist dual zu den normierten lukB-Splines.

Sei $g \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$. Diese Funktion entspricht ihrer L_2 -Approximation. Daher gilt über P_k , dass $\tilde{\Lambda}_k(g) := \Lambda_k(\hat{g}) = \Lambda_k(g)$. Die normierten lukB-Splines sind eingeschränkt auf eine Zelle aus $\mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ und da $P_k \subset \tilde{Z}_l$ ist, folgt:

$$\tilde{\Lambda}_k(\tilde{B}_j^p) = \Lambda_k(\tilde{B}_j^p) = \delta_{k, j}.$$

2. Das Funktional ist durch folgende Abschätzung beschränkt:

$$|\tilde{\Lambda}_k(f)| \leq c_{\mathbf{n},p,\alpha} \|f\|_{p,P_k}.$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung gilt:

$$|\tilde{\Lambda}_k(f)| \leq \|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega} \|q_k\|_{q,P_k} \|f\|_{p,P_k}, \quad (4.12)$$

wobei q und p zueinander Hölder-konjugiert sind. Für die Norm des lukB-Splines wird die lokale TP-Struktur der lukB-Splines ausgenutzt. Es ist hilfreich, dass alle lukB-Splines α -proper sind, denn somit existiert ein Rechteck R_k , welches $G_k = \text{supp } \tilde{B}_k = \text{supp } \tilde{B}_k \cap \Omega$ vollständig enthält. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R_k = [0, r_1] \times [0, r_2]$.

$$\begin{aligned} \|\tilde{B}_k\|_{p,\Omega}^p &= \|\tilde{b}_{1,k} \tilde{b}_{2,k}\|_{p,G_k}^p \\ &\leq \|\tilde{b}_{1,k} \tilde{b}_{2,k}\|_{p,R_k}^p \\ &= \int_{R_k} (\tilde{b}_{1,k}(x))^p (\tilde{b}_{2,k}(y))^p d(x, y) \\ &= \int_0^{r_2} (\tilde{b}_{2,k}(y))^p \int_0^{r_1} (\tilde{b}_{1,k}(x))^p dx dy \\ &\leq r_2 r_1. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist gültig, da die univariaten lukB-Splines für Punkte aus dem Gebiet eine Partition der Eins bilden (siehe [32, S.31]).

Es bleibt die Norm des Polynoms q_k abzuschätzen. Bevor die Norm berechnet wird, soll zuerst eine kurze Überlegung im Eindimensionalen eingeschoben werden:

Seien hierzu $L_k^\nu(x) = \frac{1}{\nu!2^\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} [(x^2 - 1)^\nu] \cdot (\nu + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ die univariaten normierten Legendre-Polynome über dem Intervall $[-1, 1]$. Dann gilt für die Legendre-Polynome über dem Intervall $[0, h]$: $l_k^\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} L_k^\nu(\frac{2z-h}{h})$.

Sei $\tau \in [0, h]$:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\mu < n} (-1)^{|n-1-\mu|} \tilde{\psi}_k^{(n-1-\mu)}(\tau) (l_k^\nu)^{(\mu)}(\tau) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\mu < n} (-1)^{|n-1-\mu|} \tilde{\psi}_k^{(n-1-\mu)}(\tau) \sqrt{\frac{2}{h}} (L_k^\nu)^{(\mu)}\left(\frac{2\tau-h}{h}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot c_{\nu,n} \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit $l_k^\nu(z)$ für beliebiges $z \in [0, h]$ ergibt:

$$\tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) l_k^\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{h}} \cdot c_{\nu,n} \cdot \sqrt{\frac{2}{h}} L_k^\nu\left(\frac{2z-h}{h}\right) \leq h^{-1} \cdot c'_{\nu,n}.$$

Im Zweidimensionalen ist $\tilde{\Lambda}_k$ über dem Rechteck P_k definiert. Für P_k gilt nach Definition 2.36, dass $\alpha|P_k| = |R_k|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_k = [0, p_1] \times [0, p_2]$ mit $p_i := \frac{r_i}{\alpha}$, $i = 1, 2$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|q_k\|_{q, P_k} &= \left\| \sum_{\nu < \mathbf{n}} \tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) l_k^\nu \right\|_{q, P_k} \\
&\leq \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} \int_{P_k} \left(\tilde{\lambda}_k(l_k^\nu) l_k^\nu \right)^q d(x, y) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} \int_{P_k} (p_1^{-1} p_2^{-1} \cdot c_{\nu, \mathbf{n}})^q d(x, y) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} c_{\nu, \mathbf{n}, q} (p_1 p_2)^{-q} \int_{P_k} d(x, y) \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{\nu < \mathbf{n}} c_{\nu, \mathbf{n}, q} (p_1 p_2)^{1-q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c_{\mathbf{n}, p} (p_1 p_2)^{-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

In Abschätzung (4.12) eingesetzt folgt

$$|\tilde{\Lambda}_k(f)| \leq c_{\mathbf{n}, p} \left(\frac{r_2 r_1}{p_1 p_2} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{p, P_k} = c_{\mathbf{n}, p} \alpha^{\frac{2}{p}} \|f\|_{p, P_k}.$$

□

Mit diesem Funktional wird für die Konstruktion des Quasiinterpolanten klassisch vorgegangen (siehe unter anderem [9], [32] oder [42]).

Definition 4.39. Der Quasiinterpolant $Q : W_p^n(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ wird durch

$$Q(f) := \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{\Lambda}_k(f) \tilde{B}_k^p$$

definiert.

Um die Approximationseigenschaften der normierten lukB-Splines zu zeigen, wird die Lokalität der Splines ausgenutzt. Des Weiteren wird lokal mit Polynomen approximiert. Die hierfür wichtigen Eigenschaften des Quasiinterpolanten sind Linearität, Reproduktion von Polynomen und Beschränktheit.

Lemma 4.40. Für den Quasiinterpolanten Q aus Definition 4.39 gilt:

1. Für alle $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$ gilt, $Q(q) = q$.

2. Sei $\tilde{Z}_l \cap \Omega =: \tilde{Z}_l^\Omega$ für $l \in \tilde{K}_\Omega$. Die zugehörige Umgebung sei $\bar{G}_l := \cup_{k \in I_l} G_k$, wobei $I_l := \{k \in \{1, \dots, \tilde{m}\} \mid \tilde{Z}_l^\Omega \subset G_k\}$. Für alle $f \in W_p^n(\Omega)$ existiert eine Konstante $c_{\mathbf{n},p,\alpha}$, so dass

$$\|Q(f)\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \leq c_{\mathbf{n},p,\alpha} \cdot \|f\|_{p,\bar{G}_l}.$$

Beweis:

1. Für $q \in \mathbb{P}_n(\Omega)$ gilt, $q \in \mathcal{S}_n(T, \Omega)$. Mit (4.10) folgt, dass Koeffizienten $f_j \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $q = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} f_j \tilde{B}_j^p$. Damit gilt mit Satz 4.38

$$Q(q) := \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{\Lambda}_k(q) \tilde{B}_k^p = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} \tilde{\Lambda}_k \left(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} f_j \tilde{B}_j^p \right) \tilde{B}_k^p = \sum_{k=1}^{\tilde{m}} f_k \tilde{B}_k^p = q.$$

2. Es gilt $\|\tilde{B}_k^p\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \leq \|\tilde{B}_k^p\|_{p,G_k} = \|\tilde{B}_k^p\|_{p,\Omega} = 1$. Mit Satz 4.38 folgt dann

$$\|Q(f)\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \leq \sum_{k \in I_l} |\tilde{\Lambda}_k(f)| \cdot \|\tilde{B}_k^p\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \leq \sum_{k \in I_l} c_{\mathbf{n},p,\alpha} \|f\|_{p,P_k} \leq n_1 \cdot n_2 c_{\mathbf{n},p,\alpha} \|f\|_{p,\bar{G}_l}.$$

Die letzte Abschätzung ist gültig, da sich maximal $n_1 \cdot n_2$ der Rechtecke P_k überschneiden und weiter $P_k \subset G_k$ gilt. \square

Satz 4.41. Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Sei $Q : W_p^n(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_n(T, \Omega)$ der Quasiinterpolant aus Definition 4.39. Dann gilt für $f \in W_p^n(\Omega)$

$$\|f - Q(f)\|_{p,\Omega} \leq c_{\mathbf{n},p,\Omega} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega}).$$

Die Konstante $c_{\mathbf{n},p,\Omega}$ ist dabei nur abhängig von \mathbf{n} , p und Ω .

In dem Beweis wird zuerst der Fehler auf den einzelnen Zellen $\tilde{Z}_l^\Omega := \tilde{Z}_l \cap \Omega$ beziehungsweise auf \bar{G}_l , $l \in \tilde{K}_\Omega$, abgeschätzt. Ein wesentlicher Schritt ist hierbei zu zeigen, dass ein Polynom $q \in \mathbb{P}_n$ existiert, so dass

$$\|f - q\|_{p,\bar{G}_l} \leq c \cdot (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\bar{G}_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\bar{G}_l}).$$

Falls $\bar{G}_l \cap \partial\Omega = \emptyset$, so wird über einem Rechteck approximiert. Das in diesem Fall die gewünschte Abschätzung gilt, wurde in Abschnitt 2.2.1 Korollar 2.14 aufgezeigt.

Falls allerdings $\bar{G}_l \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, so gilt dies nicht ohne Weiteres. Allerdings können hier die Resultate aus Abschnitt 2.2.2 angewandt werden. Denn falls \bar{G}_l ein Graphgebiet (Definition 2.21) ist, so ergibt sich die gewünschte Abschätzung durch Ausnutzung von Satz 2.22.

Lemma 4.42. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und $\mathcal{S}_n(T, \Omega)$ ein k^2 -Raum. Für jede Teilmenge $\bar{G}_l \subset \Omega$, $l \in \tilde{K}_\Omega$, existiert ein Kern $R_l \subset \Omega$, so dass $\bar{G}_l \cup R_l$ ein Graphgebiet ist.

Beweis:

Nach Definition 4.28 gilt, dass $\bar{G}_l \subset V_r$ für ein $r \in \{1, \dots, s\}$. Damit existiert eine a^3 -Abbildung \mathcal{A}_r , so dass $\mathcal{A}_r(\Omega_r)$ in der Grundform (4.6) dargestellt ist. Der Einfachheit halber sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit \mathcal{A}_r die Identität, das heißt, dass Ω_r schon in der Grundform gegeben sei. Nach Definition 3.1 ist der Rand $\partial\Omega_r$ dann durch den Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion $\varphi_r(x)$ darstellbar, für die gilt

$$\max\{h_1, h_2\} \leq \eta \leq \varphi_r(x).$$

Da $\bar{G}_l \subset \Omega_r$ ist, ist auch $\partial\Omega_r|_{\bar{G}_l}$ durch den Graph von φ_r darstellbar.

Per Definition ist Ω_r ein φ -Gebiet, welches sich aus den Teilen

$$B_r := \{(x, y) \in \Omega_r : y \leq \eta\} \text{ und } A_r := \{(x, y) \in \Omega_r : y \geq \eta\}$$

zusammensetzt. Dabei ist B_r ein Rechteck mit Seitenlängenvektor $|B_r| = (v_1, \eta)$, bezüglich dessen Ω_r auch ein Graphgebiet ist. Da $\bar{G}_l \subset \Omega_r$ ist, existiert somit ein Rechteck $R_l \subset \Omega_r$ mit $|R_l| \leq (v_1, \eta)$, so dass $\bar{G}_l \cup R_l$ ein Graphgebiet zu dem Kern R_l ist. \square

Die Konstellation von \bar{G}_l und R_l ist an zwei Beispielen in Abbildung 4.17(a) und 4.17(b) dargestellt. Im besten Fall ist $R_l \subset \bar{G}_l$, wie in Abbildung 4.17(b) illustriert.

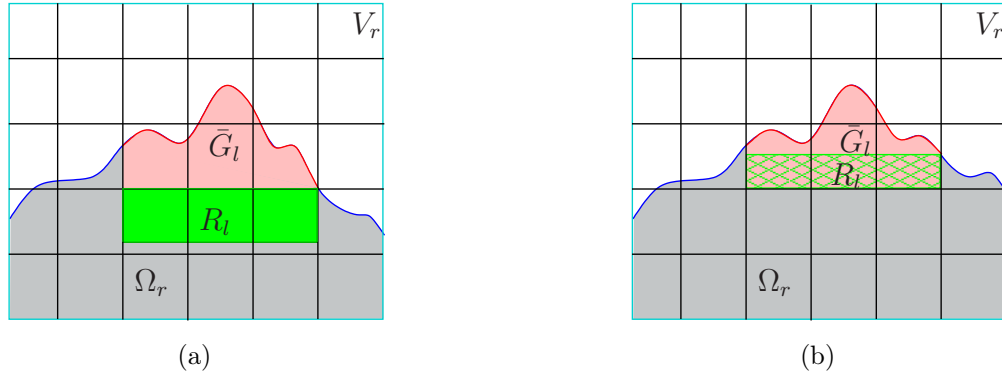
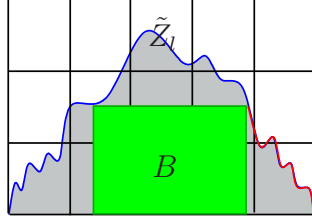


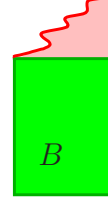
Abbildung 4.17: Zwei mögliche Konstellationen von \bar{G}_l und R_l

Da $|\bar{G}_l| = ((2n_1 - 1)h_1, (2n_2 - 1)h_2)$ und $\max\{h_1, h_2\} \leq \eta$ ist, kann die Größe des Kerns R_l sogar durch $|R_l| \leq ((2n_1 - 1)h_1, \max\{h_1, h_2\})$ beziehungsweise $|R_l| \leq (\max\{h_1, h_2\}, (2n_2 - 1)h_2)$ begrenzt werden.

Dass \bar{G}_l nicht unbedingt selbst ein Graphgebiet sein muss, ist durch das Beispiel in Abbildung 4.18 zu sehen. Hier gibt es zwar ein Rechteck $B \subset \bar{G}_l$, welches die Randkurve $\partial\Omega_r|_{\bar{G}_l}$ in Teilstücke unterteilt (siehe Abbildung 4.18(a)), jedoch ist weder der rechte rot markierte Rand noch das gegenüberliegende Stück bezüglich einer Kante von B ein Graph.



(a) \bar{G}_l zu der Zelle \tilde{Z}_l mit Kern B , $n = 3$



(b) Kein Graph bezüglich B

Abbildung 4.18: Kein Graphgebiet

Es sollte noch geklärt werden, wie die Parameter dieser Graphgebiete sind beziehungsweise wodurch diese beschränkt sind.

Korollar 4.43. *Sei $\bar{G}_l \cup R_l$ für $l \in \tilde{K}_\Omega$ ein Graphgebiet nach Lemma 4.42 und Ω_r , $r \in \{1, \dots, s\}$, ein Teilgebiet von Ω so, dass $\bar{G}_l \cup R_l \subset \Omega_r$ erfüllt ist. Dann gilt, dass die Parameter $[\bar{G}_l \cup R_l]$ des Graphgebietes durch die Parameter $[\Omega_r]$ der Teilgebiete Ω_r beschränkt sind.*

Beweis:

Das Graphgebiet $\bar{G}_l \cup R_l$ besteht aus dem Kern R_l und einem weiteren φ -Gebiet. Wie schon in dem Beweis von Lemma 4.42 bemerkt, ist Ω_r ein Graphgebiet zu dem Kern B_r , aber auch ein φ -Gebiet. Damit besteht auch Ω_r aus einem Kern und einem weiteren φ -Gebiet.

Da die Menge $\bar{G}_l \cup R_l$ vollständig in Ω_r enthalten ist, ist die Permutation, welche das Gebiet in die gewünschte Position dreht (siehe Definition 2.21), dieselbe wie die der Menge Ω_r . Die einzigen Parameter, in welchen sich die beiden Parametermengen von $\bar{G}_l \cup R_l$ und Ω_r damit unterscheiden, sind diejenigen, welche durch die Größe des Kerns und durch die Konstanten des φ -Gebietes bestimmt sind. Genau diese Größen und Konstanten sind allerdings für das Gebiet $\bar{G}_l \cup R_l$ beschränkt durch diejenigen des Gebietes Ω_r . \square

Mit Hilfe dieser Resultate kann Satz 4.41 bewiesen werden.

Beweis Satz 4.41:

Sei $\tilde{Z}_l^\Omega := \tilde{Z}_l \cap \Omega$ für $l \in \tilde{K}_\Omega$ und \bar{G}_l wie in Lemma 4.40. Für $q \in \mathbb{P}_n$ folgt mit Lemma 4.40

$$\|f - Q(f)\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega} \leq \|f - q\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega} + \|Q(f - q)\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega} \leq c_{n,p,\alpha} \cdot \|f - q\|_{p, \bar{G}_l}.$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Falls $\bar{G}_l \cap \partial\Omega = \emptyset$, so gilt nach Korollar 2.14

$$\|f - q\|_{p, \bar{G}_l} \leq c_{n,p,\alpha} \cdot (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \bar{G}_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \bar{G}_l}).$$

Die Indexmenge hierzu wird mit $\tilde{K}_1 := \{l \in \tilde{K}_\Omega : \bar{G}_l \cap \partial\Omega = \emptyset\}$ bezeichnet.

2. Falls $\bar{G}_l \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $l \in \tilde{K}_2 := \{l \in \tilde{K}_\Omega : \bar{G}_l \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$, werden die vorangegangenen Betrachtungen ausgenutzt. Demnach existiert ein Rechteck R_l , so dass $\bar{G}_l \cup R_l$ nach Lemma 4.42 ein Graphgebiet mit den Parametern $[\bar{G}_l \cup R_l]$ ist. Für $q \in \mathbb{P}_n$ gilt mit Satz 2.22

$$\begin{aligned} \|f - q\|_{p, \bar{G}_l} &\leq \|f - q\|_{p, \bar{G}_l \cup R_l} \\ &\leq c_{n,p,\alpha, [\bar{G}_l \cup R_l]} \cdot (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \bar{G}_l \cup R_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \bar{G}_l \cup R_l}). \end{aligned}$$

Um die Abschätzung des Fehlers auf dem gesamten Gebiet zu erhalten, muss über alle Zellen summiert werden.

$$\begin{aligned} \|f - Q(f)\|_{p, \Omega}^p &= \sum_{l \in \tilde{K}_\Omega} \|f - Q(f)\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega}^p \\ &\leq \sum_{l \in \tilde{K}_1} [c_{n,p,\alpha} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \bar{G}_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \bar{G}_l})]^p \\ &\quad + \sum_{l \in \tilde{K}_2} [c_{n,p,\alpha, [\bar{G}_l \cup R_l]} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \bar{G}_l \cup R_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \bar{G}_l \cup R_l})]^p \\ &\leq [c'_{n,p,\Omega} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \Omega} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \Omega})]^p. \end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung werden zwei Punkte beachtet:

- i) Die Parameter des Gebietes $[\bar{G}_l \cup R_l]$ sind nach Korollar 4.43 durch $[\Omega_r]$ für $r \in \{1, \dots, s\}$ beschränkt. Dies wirkt sich auf die Konstante so aus, dass sie durch ein $c_{n,p,\alpha, [\Omega_r]}$ beschränkt ist. Da es nur endlich viele Teilmengen Ω_r gibt, existiert eine maximale Konstante.
- ii) Durch die Erweiterung von $\tilde{Z}_l^\Omega \subset \tilde{Z}_l$ auf \bar{G}_l beziehungsweise $\bar{G}_l \cup R_l$ wird über einigen Zellen beziehungsweise Teile von Zellen die Norm mehrfach

betrachtet. Da \bar{G}_l maximal die Größe $|\bar{G}_l| = ((2n_1 - 1)h_1, (2n_2 - 1)h_2)$ und R_l maximal die Größe $|R_l| = ((2n_1 - 1)h_1, \max\{h_1, h_2\})$ beziehungsweise $|R_l| = (\max\{h_1, h_2\}, (2n_2 - 1)h_2)$ hat, können sich die Teilgebiete nur $c \cdot (n_1 \cdot n_2)$ -mal überschneiden.

□

Die Basis aus den normierten lukB-Spline ist somit stabil und hat maximale Approximationsordnung unabhängig von h . Dies gilt für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{1, 2\}$, mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und ein Anfangsgitter T mit ausreichend kleiner Gitterweite h .

4.2.4 Ableitungen des Fehlers

Im Folgenden wird die Notation $D^\nu f = \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_d^{\nu_d} f = f^{(\nu)}$ verwendet. Um abschätzen zu können, von welcher Ordnung die Ableitungen des Fehlers sind, muss zuerst ein weiterer Sobolevraum eingeführt werden. Dies liegt daran, dass auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aus $f \in W_p^n(\Omega)$ im Allgemeinen nicht folgt, dass $f^{(\nu)} \in W_p^{n-\nu}(\Omega)$. Die möglichen Folgerungen sind in Bemerkung 2.4 aufgeführt.

Definition 4.44. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $\bar{W}_p^n(\Omega)$ der Sobolevraum der Funktionen $f \in L_p(\Omega)$ mit schwachen Ableitungen $f^{(\nu)} \in L_p(\Omega)$ der Ordnung $\nu \leq \mathbf{n}$ auf Ω .

Aus $f \in \bar{W}_p^n(\Omega)$ folgt, dass $f \in W_p^n(\Omega)$, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Außerdem folgt für $f \in \bar{W}_p^n(\Omega)$ und $\nu \leq \mathbf{n}$, dass $f^{(\nu)} \in W_p^{n-\nu}(\Omega)$.

Ein weiteres notwendiges Resultat ist das Folgende.

Lemma 4.45. Sei \tilde{B}_k^p der normierte lukB-Spline nach Definition 4.23. Es gilt

$$\|(\tilde{B}_k^p)^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l} \leq c_{\mathbf{n}, p, \alpha} h_{1,k}^{-\nu_1} h_{2,k}^{-\nu_2}$$

für \tilde{Z}_l mit $l \in \tilde{K}_\Omega$ und $|\tilde{Z}_l| = (h_1^l, h_2^l) \leq (h_{1,k}, h_{2,k})$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|(\tilde{B}_k^p)^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l}^p &= \int_{\tilde{Z}_l} \left| \frac{\tilde{B}_k^{(\nu)}(x, y)}{\|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega}} \right|^p d(x, y) \\
&\leq \|\tilde{B}_k^{(\nu)}\|_{\infty, \Omega}^p \cdot \frac{h_{1,k} h_{2,k}}{\|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega}^p} \\
&\leq c_{\mathbf{n}, p, \alpha} h_{1,k}^{-\nu_1 p} h_{2,k}^{-\nu_2 p} \cdot \frac{h_{1,k} h_{2,k}}{\|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega}^p}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Gesucht ist nun eine untere Schranke für $\|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega}^p = \|\tilde{B}_k\|_{p, G_k}^p$. Da \tilde{B}_k^p nach Lemma 4.24 α -proper (siehe Definition 2.36) ist, existieren Rechtecke $P_k \subset G_k$ und R_k mit $G_k \subset R_k \subseteq \text{supp}_{\boxplus} \tilde{B}_k := [t_k, t_{k+n_1}] \times [s_k, s_{k+n_2}]$. Weiter gilt, dass P_k vollständig in einer Zelle des Gitters enthalten und $|P_k| = \frac{1}{\alpha} \cdot |R_k|$ ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $P_k \subset G_k \subset [t_k, t_{k+1}] \times [s_k, s_{k+1}]$ und damit $|R_k| = (h_{1,k}, h_{2,k})$ (siehe Abbildung 4.9).

In P_k gibt es mindestens einen Punkt p , an dem $\tilde{B}_k(p) \neq 0$ ist, sonst wäre der gesamte B-Spline 0. Da die B-Splines a^3 -invariant sind, kann eine a^3 -Abbildung

$$\mathcal{A}_k(x, y) = \begin{pmatrix} h_{1,k}x \\ h_{2,k}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_k \\ s_k \end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{A}^{-1}(R_k) = [0, 1] \times [0, 1]$ und $\mathcal{A}^{-1}(P_k) = [0, \frac{1}{\alpha}] \times [0, \frac{1}{\alpha}]$ angewandt werden, so dass gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{B}_k\|_{p, \Omega}^p &= \|\tilde{B}_k\|_{p, G_k}^p \geq h_{1,k} h_{2,k} \|\mathcal{A}_k(\tilde{B}_k)\|_{p, \mathcal{A}_k^{-1}(G_k)}^p \\
&\geq h_{1,k} h_{2,k} \|\mathcal{A}_k(\tilde{B}_k)\|_{p, \mathcal{A}_k^{-1}(P_k)}^p = c'_{\mathbf{n}, p, \alpha} h_{1,k} h_{2,k}.
\end{aligned}$$

In (4.13) eingesetzt, folgt

$$\|(\tilde{B}_k^p)^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l}^p \leq c''_{\mathbf{n}, p, \alpha} h_{1,k}^{-\nu_1 p} h_{2,k}^{-\nu_2 p}.$$

□

Mit diesem Resultat und unter Ausnutzung von Lemma 4.40 und Satz 4.41 kann für $f \in \bar{W}_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ folgende Aussage getroffen werden.

Proposition 4.46. *Gegeben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$. Für $f \in \bar{W}_p^n(\Omega)$ und $\nu \leq n$ gilt*

$$\begin{aligned} \|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p,\Omega} &\leq c_{\mathbf{n},p,\nu,\Omega} \left[h_1^{n_1-\nu_1} (\|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p,\Omega} + h_{2,\Omega}^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\Omega}) \right. \\ &\quad \left. + h_2^{n_2-\nu_2} (\|\partial_2^{n_2} \partial_1^{\nu_1} f\|_{p,\Omega} + h_{1,\Omega}^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega}) \right]. \end{aligned}$$

mit $h_{i,\Omega} := \min_{l \in \tilde{K}_\Omega} (h_i^l)$ für $i = 1, 2$. Die Konstante ist abhängig von \mathbf{n} , p , ν und dem Gebiet Ω .

Beweis:

Sei $\tilde{Z}_l^\Omega := \tilde{Z}_l \cap \Omega$ für $l \in \tilde{K}_\Omega$ und \bar{G}_l wie in Lemma 4.40. Weiter sei $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}-\nu}$ ein Polynom, welches $f^{(\nu)}$ approximiert. Dann existiert ein Polynom $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$, so dass $p^{(\nu)} = q$ und p die Funktion f approximiert. Weiter ist $(Q(p))^{(\nu)} = p^{(\nu)} = q$. Es gilt damit

$$\|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \leq \|f^{(\nu)} - q\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} + \|(Q(f - p))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega}.$$

Abschätzung von $\|f^{(\nu)} - q\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega}$:

Da $f \in \bar{W}_p^n(\Omega)$, gilt $f^{(\nu)} \in W_p^{\mathbf{n}-\nu}(\Omega)$ und daher analog zu dem Beweis von Satz 4.41 durch Anwendung von Satz 2.22

$$\begin{aligned} \|f^{(\nu)} - q\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} &\leq \|f^{(\nu)} - q\|_{p,\bar{G}_l} \\ &\leq c_{\mathbf{n},p,\alpha,\nu,[\bar{G}_l \cup R_l]} \left(h_1^{n_1-\nu_1} \|\partial_1^{n_1-\nu_1} f^{(\nu)}\|_{p,\bar{G}_l \cup R_l} \right. \\ &\quad \left. + h_2^{n_2-\nu_2} \|\partial_2^{n_2-\nu_2} f^{(\nu)}\|_{p,\bar{G}_l \cup R_l} \right). \end{aligned}$$

Abschätzung von $\|(Q(f - p))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega}$:

Mit Lemma 4.45 und Korollar 2.14 gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{\Lambda}_k(f - p)| &\leq c_{\mathbf{n},p,\alpha} \|f - p\|_{p,P_k} \\ &\leq c_{\mathbf{n},p,\alpha} (p_{1,k}^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,P_k} + p_{2,k}^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,P_k}) \\ &\leq c_{\mathbf{n},p,\alpha} (h_{1,k}^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,P_k} + h_{2,k}^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,P_k}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

für das Rechteck P_k mit $|P_k| = (p_{1,k}, p_{2,k})$. Mit Lemma 4.40 folgt

$$\begin{aligned} \|(Q(f - p))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} &\leq \sum_{k \in I_l} |\tilde{\Lambda}_k(f - p)| \cdot \|(\tilde{B}_k^p)^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l^\Omega} \\ &\leq \sum_{k \in I_l} c_{\mathbf{n},p,\alpha} (h_{1,k}^{n_1-\nu_1} h_{2,k}^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,P_k} + h_{2,k}^{n_2-\nu_2} h_{1,k}^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,P_k}). \end{aligned}$$

Da $n_i - \nu_i \geq 0$, gilt $h_{i,k}^{n_i - \nu_i} \leq h_i^{n_i - \nu_i}$ für $i = 1, 2$. Weiter ist $(h_1^l, h_2^l) \leq (h_{1,k}, h_{2,k})$ für $k \in \tilde{K}_\Omega$ (siehe Notationen 4.32). Somit ist

$$\begin{aligned} \|(Q(f - p))^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega} &\leq c_{\mathbf{n}, p, \alpha} (h_1^{n_1 - \nu_1} (h_2^l)^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \tilde{G}_l} \\ &\quad + h_2^{n_2 - \nu_2} (h_1^l)^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \tilde{G}_l}) . \end{aligned}$$

Alles zusammen und über die Zellen summiert folgt

$$\begin{aligned} \|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p, \Omega}^p &= \sum_{l \in \tilde{K}_\Omega} \|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega}^p \\ &\leq \sum_{l \in \tilde{K}_\Omega} [c_{\mathbf{n}, p, \alpha, [\tilde{G}_l \cup R_l]} (h_1^{n_1 - \nu_1} \|\partial_1^{n_1 - \nu_1} f^{(\nu)}\|_{p, \tilde{G}_l \cup R_l} + h_2^{n_2 - \nu_2} \|\partial_2^{n_2 - \nu_2} f^{(\nu)}\|_{p, \tilde{G}_l \cup R_l}) \\ &\quad + c_{\mathbf{n}, p, \alpha} (h_1^{n_1 - \nu_1} (h_2^l)^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \tilde{G}_l} + h_2^{n_2 - \nu_2} (h_1^l)^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \tilde{G}_l})]^p . \end{aligned}$$

Da es nur endlich viele Zellen gibt, existiert $\min_l (h_i^l) =: h_{i, \Omega}$ und mit denselben Argumenten wie in dem Beweis zu Satz 4.41 ergibt dies

$$\begin{aligned} \|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p, \Omega}^p &\leq c_{\mathbf{n}, p, \nu, \Omega}^p [h_1^{n_1 - \nu_1} (\|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p, \Omega} + h_{2, \Omega}^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \Omega}) \\ &\quad + h_2^{n_2 - \nu_2} (\|\partial_2^{n_2} \partial_1^{\nu_1} f\|_{p, \Omega} + h_{1, \Omega}^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \Omega})]^p . \end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis ist nicht zufriedenstellend. Zum einen kann $h_{i, \Omega}^{-\nu_i}$ beliebig groß werden und zum anderen wäre die gesuchte Abschätzung analog zu Satz 4.41 von der Form

$$\begin{aligned} \|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p, \Omega} &\leq c [h_1^{n_1 - \nu_1} \|\partial_1^{n_1 - \nu_1} f^{(\nu)}\|_{p, \Omega} + h_2^{n_2 - \nu_2} \|\partial_2^{n_2 - \nu_2} f^{(\nu)}\|_{p, \Omega}] \\ &= c [h_1^{n_1 - \nu_1} \|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p, \Omega} + h_2^{n_2 - \nu_2} \|\partial_2^{n_2} \partial_1^{\nu_1} f\|_{p, \Omega}] . \end{aligned}$$

Die Terme $h_{2, \Omega}^{-\nu_2} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p, \Omega}$ und $h_{1, \Omega}^{-\nu_1} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p, \Omega}$, welche in Proposition 4.46 auftauchen, sind unerwünscht. Die genauere Betrachtung des Beweises zeigt, dass die Problematik bei der Abschätzung von $\|(Q(f - q))^{(\nu)}\|_p$ entsteht. Hierbei führt zum einen die Abschätzung (4.14) der dualen Funktionele und zum anderen die Norm der Ableitungen der lukB-Splines (siehe Lemma 4.45) zu den problematischen Termen. Das Problem, welches bei der Abschätzung der dualen Funktionele entsteht, tritt auf rechteckigen Gebieten nicht auf. Dort sind alle B-Splines, deren Träger durch das Kondensieren verkleinert werden, Rand-B-Splines (zur Erklärung siehe Seite 84) und es gilt

$$\tilde{B}_k^p(x, y) = B_k^p(x, y) \quad \text{für alle } k \in \tilde{K}_\Omega \text{ und } (x, y) \in \Omega. \quad (4.15)$$

Dies ergibt sich durch Anwendung von Korollar 4.5 auf die univariaten Anteile der Rand-B-Splines. Die Eigenschaft der lukB-Splines, α -proper zu sein, ist bei rechteckigen Gebieten nur von \mathbf{n} abhängig. Es gibt zwei mögliche Problemstellen:

1. Ecken

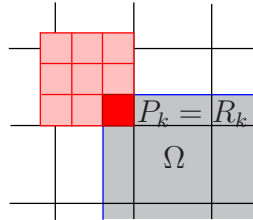


Abbildung 4.19: α -proper, Ecke von Rechteck

Im Fall der Ecke stimmen die Rechtecke R_k und P_k aus Definition 2.36 überein. Dies wird in Abbildung 4.19 anhand einer Ecke gezeigt, gilt allerdings analog in den anderen Ecken.

2. Kanten

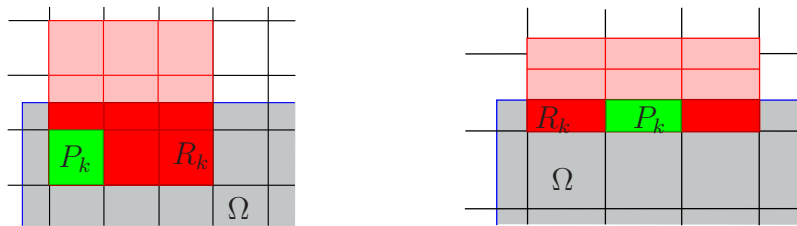


Abbildung 4.20: α -proper, Kante von Rechteck

Liegt der Träger an einer Kante, so ergibt sich für die Rechtecke R_k und P_k ein Größenverhältnis, welches nur von \mathbf{n} abhängt. Für die in Abbildung 4.20 dargestellten Extremfälle mit $n = n_1 = n_2$ gilt, $\alpha \geq n$.

Die Abhängigkeit der Konstanten von α oder Ω in diesem Kapitel ist bezogen auf Rechtecke somit eine Abhängigkeit von der Ordnung \mathbf{n} .

Im Folgenden sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Bevor gezeigt wird, dass hier wirklich die erwünschte Fehlerabschätzung gültig ist, werden zwei Lemmata benannt.

Lemma 4.47. Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit Seitenlängenvektor $|\Omega| = (r_x, r_y)$. Gegeben sei eine Funktion $g \in \bar{W}_p^{\mathbf{n}}$. Falls

$$\frac{1}{r_x} \int_{\Omega_1} g^{(\beta,0)}(x,y) dx = 0 \quad \text{für alle } \beta \leq \nu_1 - 1, y \in \Omega_2 \quad (4.16)$$

und

$$\frac{1}{r_y} \int_{\Omega_2} g^{(\nu_1,\gamma)}(x,y) dy = 0 \quad \text{für alle } \gamma \leq \nu_2 - 1, x \in \Omega_1 \quad (4.17)$$

mit $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \leq \mathbf{n}$ erfüllt ist, so gilt

$$\|g\|_{p,\Omega} \leq c_p \cdot r_x^{\nu_1} r_y^{\nu_2} \|g^{(\boldsymbol{\nu})}\|_{p,\Omega}.$$

Hierbei ist c_p eine von p abhängige Konstante.

Beweis:

Die Konstante c_p sei im Folgenden eine generische Konstante. Der Beweis besteht aus zwei Schritten.

1. $\|g\|_{p,\Omega} \leq c_p \cdot r_x^{\nu_1} \|g^{(\nu_1,0)}\|_{p,\Omega}.$
 2. $\|g^{(\nu_1,0)}\|_{p,\Omega} \leq c_p \cdot r_y^{\nu_2} \|g^{(\boldsymbol{\nu})}\|_{p,\Omega}.$
1. Nach (4.16) gilt $\frac{1}{r_x} \int_{\Omega_1} g(x,y) dx = 0$ für alle $y \in \Omega_2$ und damit folgt mit der Poincaré-Ungleichung (siehe zum Beispiel [1])

$$\begin{aligned} \|g\|_{p,\Omega}^p &= \int_{\Omega} |g(x,y)|^p dx dy = \int_{\Omega_2} \|g(\cdot, y)\|_{p,\Omega_1}^p dy \\ &\leq c_p \cdot \int_{\Omega_2} r_x^p \|g^{(1,0)}(\cdot, y)\|_{p,\Omega_1}^p dy = c_p \cdot r_x^p \|g^{(1,0)}\|_{p,\Omega}^p. \end{aligned}$$

Für alle $\beta \leq \nu_1 - 1$ gilt, dass $\frac{1}{r_x} \int_{\Omega_1} g^{(\beta,0)}(x,y) dx = 0$ für alle $y \in \Omega_2$. Wiederholtes Anwenden der Poincaré-Ungleichung erlaubt folgende Abschätzung:

$$\|g\|_{p,\Omega}^p \leq c_p \cdot r_x^{2p} \|g^{(2,0)}\|_{p,\Omega}^p \leq \dots \leq c_p \cdot r_x^{\nu_1 p} \|g^{(\nu_1,0)}\|_{p,\Omega}^p. \quad (4.18)$$

2. Nun wird nach (4.17) vorausgesetzt, dass $\frac{1}{r_y} \int_{\Omega_2} g^{(\nu_1,0)}(x,y) dy = 0$ für alle $x \in \Omega_1$ und daher gilt erneut mit der Poincaré-Ungleichung, allerdings angewandt auf die y -Koordinate,

$$\|g^{(\nu_1,0)}\|_{p,\Omega}^p \leq c_p \cdot r_y^p \|g^{(\nu_1,1)}\|_{p,\Omega}^p.$$

Da (4.17) für alle $0 \leq \gamma \leq \nu_2 - 1$ erfüllt sein soll, führt dies analog zu (4.18) zu folgender Abschätzung:

$$\|g^{(\nu_1, 0)}\|_{p, \Omega}^p \leq c_p \cdot r_y^{\nu_2 p} \|g^{(\nu)}\|_{p, \Omega}^p. \quad (4.19)$$

Einsetzen der Abschätzung (4.19) in (4.18) ergibt

$$\|g\|_{p, \Omega} \leq c_p \cdot r_x^{\nu_1} r_y^{\nu_2} \|g^{(\nu)}\|_{p, \Omega}.$$

□

In dem Beweis der Fehlerabschätzung werden zuerst die einzelnen Zellen betrachtet und anschließend wird dies für das gesamte Gebiet zusammengesetzt. Dabei ist die Abschätzung von $\|(Q(g))^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l^\Omega}$ für $\tilde{Z}_l^\Omega := \tilde{Z}_l \cap \Omega$, $l \in \tilde{K}_\Omega$ von Bedeutung. Auf Rechtecken gilt $\tilde{Z}_l^\Omega = \tilde{Z}_l$ für alle $l \in \tilde{K}_\Omega$.

Lemma 4.48. *Gegeben sei ein Rechteck $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$. Sei \tilde{Z}_l eine Zelle des kondensierten Gitters und \tilde{G}_l die zugehörige Umgebung (siehe Lemma 4.40) der normierten lukB-Splines \tilde{B}_k^p . Falls $g \in \bar{W}_p^n(\Omega)$ von der Form $g(x, y) = u(y) \cdot x^r$ beziehungsweise $g(x, y) = v(x) \cdot y^s$ für $0 \leq r \leq \nu_1 - 1$ beziehungsweise $0 \leq s \leq \nu_2 - 1$ ist, so gilt für $\nu \leq n$*

$$\|(Q(g))^{(\nu)}\|_{p, \tilde{Z}_l} = 0.$$

Beweis:

Da Ω ein Rechteck ist, können durch (4.15) statt der normierten lukB-Splines die normierten TPB-Splines betrachtet werden.

Sei $g(x, y) = v(x) \cdot y^s$. Der Beweis für $g(x, y) = u(y) \cdot x^r$ verläuft analog. Weiter sei $P_k = \bar{x}_k \times \bar{y}_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_k(g) &= \|B_k\|_{p, \Omega} \tilde{\lambda}_k \left(\sum_{\beta < n} \langle g, l_k^\beta \rangle l_k^\beta \right) \\ &= \|B_k\|_{p, \Omega} \tilde{\lambda}_{1, k} \left(\sum_{\beta_1 < n_1} \langle v, l_k^{\beta_1} \rangle l_k^{\beta_1} \right) \tilde{\lambda}_{2, k} \left(\sum_{\beta_2 < n_2} \langle y^s, l_k^{\beta_2} \rangle l_k^{\beta_2} \right) \\ &= \|B_k\|_{p, \Omega} \tilde{\lambda}_{1, k}(\hat{v}) \tilde{\lambda}_{2, k}(y^s). \end{aligned}$$

Hierbei wird in dem letzten Schritt ausgenutzt, dass die Funktion y^s ihrer L_2 -Approximation entspricht. Weiter kann y^s bezüglich der TPB-Splines dargestellt werden, da $s \leq \nu_2 - 1 < n_2$. Das heißt, es existieren Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$, so dass $y^s = \sum_{i \in I_{\Omega_2}} c_i b_{2, i}(y)$ für $y \in \Omega_2$. Dann gilt

$$\tilde{\lambda}_{2, k}(y^s) = c_k.$$

Weiter ist

$$\tilde{\lambda}_{1,k}(\hat{v}) = \int_{\bar{x}_k} v(x) \left(\sum_{\beta_1 < n_1} \tilde{\lambda}_{1,k}(l_k^{\beta_1}) l_k^{\beta_1}(x) \right) dx =: z(\bar{x}_k) \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(Q(g))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l} &= \left\| \left(\sum_{k \in I_l} \tilde{\Lambda}_k(g) B_k^p \right)^{(\nu)} \right\|_{p,\tilde{Z}_l} \\ &= \left\| \left(\sum_{k \in I_l} \|B_k\|_{p,\Omega} z(\bar{x}_k) \cdot c_k \cdot \frac{B_k}{\|B_k\|_{p,\Omega}} \right)^{(\nu)} \right\|_{p,\tilde{Z}_l} \\ &= \left\| \left(\sum_{k \in I_l} z(\bar{x}_k) \cdot c_k \cdot B_k \right)^{(\nu)} \right\|_{p,\tilde{Z}_l} \end{aligned}$$

Die Umgebung \bar{G}_l besteht aus den $n_1 \cdot n_2$ Schnitten der B-Splines B_k , $k \in I_l$, mit dem Gebiet Ω . Da dieses ein Rechteck ist, ist auch \bar{G}_l ein Rechteck, welches mindestens $n_1 \cdot n_2$ der Zellen \tilde{Z}_τ , $\tau \in \tilde{K}_\Omega$, enthält.

Seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Indizes der TPB-Splines über \tilde{Z}_l gleich $i = 1, \dots, n_1$ und $j = 1, \dots, n_2$. Die Funktionale $\tilde{\Lambda}_{ij}$ sind dann über dem jeweiligen Rechteck $P_{ij} = \bar{x}_{ij} \times \bar{y}_{ij}$ definiert. Die Koeffizienten $z(\bar{x}_{ij})$ nach (4.20) sind allein durch die Intervalle \bar{x}_{ij} bestimmt. Diese können aufgrund der Form von \bar{G}_l so gewählt werden, dass gilt

$$\bar{x}_{i1} = \bar{x}_{i2} = \dots = \bar{x}_{in_2} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n_1.$$

Daher sei nun $z(\bar{x}_{ij}) =: z_i$ für $i = 1, \dots, n_1$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n_2} z_i b_{1,i}(x) c_j b_{2,j}(y) = z_i b_{1,i}(x) \cdot \sum_{j=1}^{n_2} c_j b_{2,j}(y) = z_i b_{1,i}(x) \cdot y^s.$$

Für die gesamte Summe folgt

$$\sum_{k \in I_l} z(\bar{x}_k) B_k = y^s \cdot \sum_{i=1}^{n_1} z_i b_{1,i}(x).$$

Damit gilt für ν mit $\nu_2 \neq 0$

$$\|(Q(g))^{(\nu)}\|_{p,\tilde{Z}_l} = \left\| \left(y^s \cdot \sum_{i=1}^{n_1} z_i b_{1,i}(x) \right)^{(\nu)} \right\|_{p,\tilde{Z}_l} = 0.$$

□

Auf Seite 110 wurde erwähnt, dass auch die Norm der Ableitungen der lukB-Splines ein Problem in sich birgt. Das besteht darin, dass nach Lemma 4.45 die

Abschätzung von der kondensierten Gitterweite h_k abhängig ist. Auf Rechtecken ist das unproblematisch, da durch (4.15) für alle $k \in \tilde{K}_\Omega$ die Gitterweite $h_k = h$ gesetzt werden kann. Allerdings ist die rechte Seite der Abschätzung in Lemma 4.45 für TPB-Splines unbeschränkt. Dies lässt sich sehr einfach umgehen, indem Rechtecke betrachtet werden, deren Kanten auf Gitterlinien des TP-Gitter liegen.

Mit Hilfe der beiden Lemmata 4.47 und 4.48 ist es möglich, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.49. *Gegeben sei ein Rechteck $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$. Das TP-Gitter T sei so gewählt, dass Ω_1 und Ω_2 uniform unterteilt werden. Für $f \in \bar{W}_p^n(\Omega)$ und $\nu < n$ gilt*

$$\|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p,\Omega} \leq c_{\mathbf{n},p,\nu} \left(h_1^{n_1-\nu_1} \|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2-\nu_2} \|\partial_1^{\nu_1} \partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega} \right)$$

mit einer von \mathbf{n} , p und ν abhängigen Konstanten.

Beweis:

Da ein Rechteck betrachtet wird, kann nach (4.15) angenommen werden, dass normierte TPB-Splines zu Grunde liegen und somit ist $(h_{1,k}, h_{2,k}) = (h_1, h_2)$ für alle $k \in \tilde{K}_\Omega = K_\Omega$.

Für Z_l mit $l \in K_\Omega$ sei \bar{G}_l die zugehörige Umgebung analog zu Lemma 4.40. Da das betrachtete Gebiet Ω ein Rechteck ist, sind alle \bar{G}_l Rechtecke. Diese werden hier mit $\bar{G}_l := \bar{G}_{l,1} \times \bar{G}_{l,2}$ mit $|\bar{G}_l| = (d_1 \cdot h_1, d_2 \cdot h_2)$ für $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

Sei $q \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}-\nu}$ ein Polynom, welches $f^{(\nu)}$ approximiert. Es gilt

$$\|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p,Z_l} \leq \|f^{(\nu)} - q\|_{p,Z_l} + \|(Q(f))^{(\nu)} - q\|_{p,Z_l}.$$

Mit Satz 4.41 gilt

$$\|f^{(\nu)} - q\|_{p,Z_l} \leq c_{\mathbf{n},p,\nu} \left(h_1^{n_1-\nu_1} \|\partial_1^{n_1-\nu_1} f^{(\nu)}\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2-\nu_2} \|\partial_2^{n_2-\nu_2} f^{(\nu)}\|_{p,\Omega} \right).$$

Es bleibt somit $\|(Q(f))^{(\nu)} - q\|_{p,Z_l}$ abzuschätzen. Es existiert ein $p \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}$, so dass $p^{(\nu)} = q$ und p die Funktion f approximiert. Da $(Q(p))^{(\nu)} = p^{(\nu)} = q$ ist, folgt

$$\|(Q(f))^{(\nu)} - q\|_{p,Z_l} = \|(Q(f - p))^{(\nu)}\|_{p,Z_l}.$$

Nun könnte analog zu dem Beweis von Proposition 4.46 wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} \|(Q(f-p))^{(\nu)}\|_{p,Z_l} &\leq \sum_{k \in I_l} |\tilde{\Lambda}_k(f-p)| \cdot \|(B_k^p)^{(\nu)}\|_{p,Z_l} \\ &\leq \sum_{k \in I_l} c_{\mathbf{n},p} \|f-p\|_{p,P_k} \cdot h_1^{-\nu_1} h_2^{-\nu_2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wenn $f-p$ nun die Bedingungen (4.16) und (4.17) von Lemma 4.47 erfüllen würden, so könnte die richtige Abschätzung vorgenommen werden. Dies ist allerdings für beliebige $f \in \bar{W}_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ nicht gültig. Es wird nun die folgende Zerlegung der Funktion f betrachtet

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \bar{f}(x,y) + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} u_i(y) \cdot x^i + \sum_{j=0}^{\nu_2-1} v_j(x) \cdot y^j \\ &=: \bar{f}(x,y) + \bar{u}_f(x,y) + \bar{v}_f(x,y). \end{aligned}$$

Hierbei werden die Funktionen $u_i(y)$ und $v_i(x)$ so gewählt, dass

$$\frac{1}{d_1 \cdot h_1} \int_{\bar{G}_{l,1}} \bar{f}^{(\beta,0)}(x,y) dx = 0 \quad \text{für alle } \beta \leq \nu_1 - 1, y \in \bar{G}_{l,2} \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{d_2 \cdot h_2} \int_{\bar{G}_{l,2}} \bar{f}^{(\nu_1,\gamma)}(x,y) dy = 0 \quad \text{für alle } \gamma \leq \nu_2 - 1, x \in \bar{G}_{l,1}. \quad (4.23)$$

Die Funktionen $u_i(y)$ und $v_i(x)$ können entsprechend gewählt werden, da zum einen die Anzahl der benötigten Bedingungen der Anzahl der frei wählbaren Funktionen entspricht und zum anderen eine rekursive Bestimmung möglich ist. Aus der letzten Bedingung in (4.23) für $\bar{f}^{(\nu_1,\nu_2-1)}$ kann die Funktion v_{ν_2-1} ermittelt werden. Die übrigen Funktionen werden dann nacheinander durch die restlichen Bedingungen in (4.23) und (4.22) bestimmt. Analog wird das approximierende Polynom $p = \bar{p} + \bar{u}_p + \bar{v}_p$ zerlegt. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|(Q(f-p))^{(\nu)}\|_{p,Z_l} &\leq \|(Q(\bar{f}-\bar{p}))^{(\nu)}\|_{p,Z_l} \\ &\quad + \|(Q(\bar{u}_f-\bar{u}_p))^{(\nu)}\|_{p,Z_l} + \|(Q(\bar{v}_f-\bar{v}_p))^{(\nu)}\|_{p,Z_l}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.48 gilt, dass die beiden letzten Anteile verschwinden. Nun gilt für den Restterm wie in (4.21)

$$\begin{aligned}
\|(Q(\bar{f} - \bar{p}))^{(\nu)}\|_{p, Z_l} &\leq \sum_{k \in I_l} c_{\mathbf{n}, p} \|\bar{f} - \bar{p}\|_{p, P_k} \cdot h_1^{-\nu_1} h_2^{-\nu_2} \\
&\leq c_{\mathbf{n}, p} \|\bar{f} - \bar{p}\|_{p, \bar{G}_l} \cdot h_1^{-\nu_1} h_2^{-\nu_2} \\
&\leq c_{\mathbf{n}, p, \nu} \|(\bar{f} - \bar{p})^{(\nu)}\|_{p, \bar{G}_l} = c_{\mathbf{n}, p, \nu} \|(f - p)^{(\nu)}\|_{p, \bar{G}_l}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde Lemma 4.47 ausgenutzt. Auf den letzten Term kann erneut Satz 4.41 angewandt werden. Da die Teilmengen \bar{G}_l maximal von der Größe $((2n_1 - 1)h_1, (2n_1 - 1)h_2)$ sind, können sich diese maximal $(2n_1 - 1)(2n_2 - 1)$ -mal überschneiden und somit folgt

$$\|(f - Q(f))^{(\nu)}\|_{p, \Omega} \leq c_{\mathbf{n}, p, \nu} \left(h_1^{n_1 - \nu_1} \|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p, \Omega} + h_2^{n_2 - \nu_2} \|\partial_1^{\nu_1} \partial_2^{n_2} f\|_{p, \Omega} \right)$$

□

Somit konnte die erwünschte Fehlerabschätzung über Rechtecken gezeigt werden. Der Übergang zu beliebigen Gebieten ist allerdings nicht direkt einsehbar. Weder die Ausnutzung von (4.15) noch die passende Aufteilung der Rechtecke P_k in Lemma 4.48 ist unter der Bedingung $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ garantiert.

4.3 Verallgemeinerungen

In den folgenden Abschnitten, wird diskutiert, ob das Verfahren des (lokalen) uniformen Kondensierens auch in anderen multivariaten Räumen angewendet werden kann und ob an der Uniformität der Trägerknoten festgehalten werden muss. In dem ersten Abschnitt werden die Bedingungen an die Gebiete genauer betrachtet.

4.3.1 Gebiete

Die Theorie zu den uniform kondensierten B-Splines wurde für Gebiete mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ entwickelt. Das heißt, es wurde vorausgesetzt, dass einerseits ein Gebiet mit Rand der Klasse $\text{Lip } 1$ betrachtet wird und andererseits der Rand mit horizontalen und vertikalen Geraden nur endlich viele Schnitte hat. Diese Bedingungen haben technische Gründe. Die endlichen Schnitte führen dazu, dass nur eine endliche Anzahl von Vervielfältigungen entstehen und somit $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$

eine endliche Basis besitzt. Die Lipschitz-Bedingung wird vor allem benötigt, um die α -proper Eigenschaft der lukB-Splines nachzuweisen.

Das Gebiet aus Beispiel 2.29 ist kein Gebiet mit $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$ und mit den klassischen TP-Splines kann keine optimale Approximationsordnung erreicht werden. Für dieses Gebiet wird im folgenden Beispiel das Konzept des uniformen Kondensierens angewandt.

Beispiel 4.50. Gegeben sei das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq \sqrt{|x|}\}$$

und das Anfangsgitter T mit Gitterweite $(2h, 2h)$ aus Beispiel 2.29. Die B-Splines seien von der Ordnung $\mathbf{n} = (1, 1)$. Damit ergibt sich nach dem Prinzip des uniformen Kondensierens das in Abbildung 4.21 dargestellte Gitter.

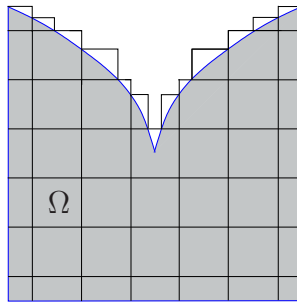


Abbildung 4.21: Kondensiertes Gitter

Die zu approximierende Funktion sei erneut

$$f(x, y) := \begin{cases} y & y \geq 0, x \geq 0 \\ -y & y \geq 0, x \leq 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}.$$

Im Fall der TPB-Splines gab es einen B-Spline, der sowohl $f(-h, \sqrt{h})$ als auch $f(h, \sqrt{h})$ approximieren musste. Der approximierende Spline hatte somit den Wert 0 und der Fehler war von der Größe \sqrt{h} . Im uniform kondensierten Fall ist der Fehler auf allen Zellen \tilde{Z}_l von der Größe $\frac{1}{2} \cdot \tilde{h}_l \leq h$ und damit

$$\|f - s\|_{\infty, \Omega} = h.$$

■

Dieses Beispiel lässt vermuten, dass das (lokale) uniforme Kondensieren auch für eine größere Klasse an Gebieten zu Splineräumen mit den gewünschten Approximationseigenschaften führen kann.

Auch die Einschränkung der Anzahl der möglichen Kopien ist, nicht unbedingt notwendig. Ohne diese Bedingung würde sich in (4.11) eine Summierung über den Index $k \in \mathbb{N}$ ergeben. Allerdings würde nach wie vor gelten, dass an jedem Punkt $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ (beziehungsweise $t \in \Omega \subset \mathbb{R}$) nur $n_1 \times n_2$ (beziehungsweise n) B-Splines einen Beitrag liefern. Die meisten Argumente der Stabilitätsbeweise sind somit analog auch für die unendliche B-Spline-Basis durchführbar. Die Abschätzung am Ende des Beweises zu Satz 4.36 (beziehungsweise Satz 4.20)

$$\sum_{k=1}^{\tilde{m}} (c_{\mathbf{n},L,p} \cdot \|s\|_{p,P_k})^p \leq (n_1 \cdot n_2) c_{\mathbf{n},L,p}^p \|s\|_{p,\Omega}^p$$

könnte ein Problem darstellen. Dasselbe Problem tritt auch auf, wenn die Beschränkung des Quasiinterpolanten (Lemma 4.40) bewiesen wird. Allerdings ist die Konstante $c_{\mathbf{n},L,p}$ unabhängig von k und somit gilt diese Abschätzung mit dem selben Argument, dass sich die Rechtecke P_k maximal $(n_1 \cdot n_2)$ -mal überschneiden, auch für $\tilde{m} = \infty$.

Auch die Abschätzung des Fehlers auf dem ganzen Gebiet ist wie in dem Beweis zu Satz 4.41 durchführbar. Ein Schritt könnte allerdings problematisch sein. Nachdem die Norm über Ω in die einzelnen Zellen aufgeteilt wurde, wird folgende Abschätzung gemacht

$$\begin{aligned} & \sum_{l \in \tilde{K}_1} [c_{\mathbf{n},p,\alpha} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\tilde{G}_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\tilde{G}_l})]^p \\ & + \sum_{l \in \tilde{K}_2} [c_{\mathbf{n},p,\alpha,[\tilde{G}_l \cup R_l]} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\tilde{G}_l \cup R_l} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\tilde{G}_l \cup R_l})]^p \\ & \leq [c'_{\mathbf{n},p,\Omega} (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega})]^p. \end{aligned}$$

Hier sind die Konstanten $c_{\mathbf{n},p,\alpha,[\tilde{G}_l \cup R_l]}$ von l abhängig und wird über eine unendliche Anzahl von \tilde{Z}_l summiert, so ist die Abschätzung mit $c'_{\mathbf{n},p,\Omega}$ eventuell nicht möglich. Die Konstanten sind genau genommen das Produkt von $c_{\mathbf{n},p,\alpha}$ aus der Beschränktheit des Quasiinterpolanten und $c_{\mathbf{n},p,[\tilde{G}_l \cup R_l]}$ aus Satz 2.22. Die Abhängigkeit der zweiten Konstanten von $[\tilde{G}_l \cup R_l]$ ist in [45, S.8] näher bestimmt. Da diese allerdings durch eine der mögliche Parameterkonstellationen $[\Omega_r]$, $r = 1, \dots, s$ beschränkt sind, gibt es eine endliche Konstante, welche alle Konstanten $c_{\mathbf{n},p,[\tilde{G}_l \cup R_l]}$ beschränkt. Somit ist auch der Approximationsbeweis für $\tilde{m} = \infty$ möglich.

Auf die zweite Bedingung in Definition 4.22 kann verzichtet werden und auch die Bedingung $\partial\Omega \in \text{Lip } 1$ kann vermutlich gelockert werden. Die Funktionen φ_r , deren Graphen den Rand der Teilgebiete Ω_r beschreiben, müssen nicht unbedingt eine Lipschitz-Bedingung erfüllen (siehe Beispiel 4.50). Notwendig für die Konstruktion der lukB-Splines und der Graphgebiete in Abschnitt 4.2.3 ist allerdings die Bedingung

$$a_2^r + \eta < \varphi_r(x) \quad \text{für } x \in [a_1^r, b_1^r]$$

mit $\Omega_r \subset V_r = [a_1^r, b_1^r] \times [a_2^r, b_2^r]$ und auch, dass der gewählte Splineraum $\mathcal{S}_{\mathbf{n}}(T, \Omega)$ ein k^2 -Raum (siehe Definition 4.28) ist.

4.3.2 Höhere Dimensionen

Das Verfahren des uniformen Kondensierens ist ohne Probleme auf beliebige Dimensionen verallgemeinerbar. Doch schon ein einfaches Beispiel im \mathbb{R}^3 zeigt, dass dies nicht notwendigerweise zu einer starken Verbesserung der Stabilität im Vergleich zu dem Verfahren des Normierens führen muss.

Beispiel 4.51. Gegeben sei ein Zylinder im \mathbb{R}^3 und ein Gitter $T = T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$, so dass einer der Träger $\text{supp } b_i$, $i \in \mathbb{Z}^3$ das Gebiet wie in Abbildung 4.22 schneidet. Hier ist der Schnitt des Zylinders mit einer der Gitterzellen Z_k , $k \in \mathbb{Z}^3$ abgebildet. Eine einzelne Zelle des Trägers zu betrachten, ist in diesem Fall ausreichend.

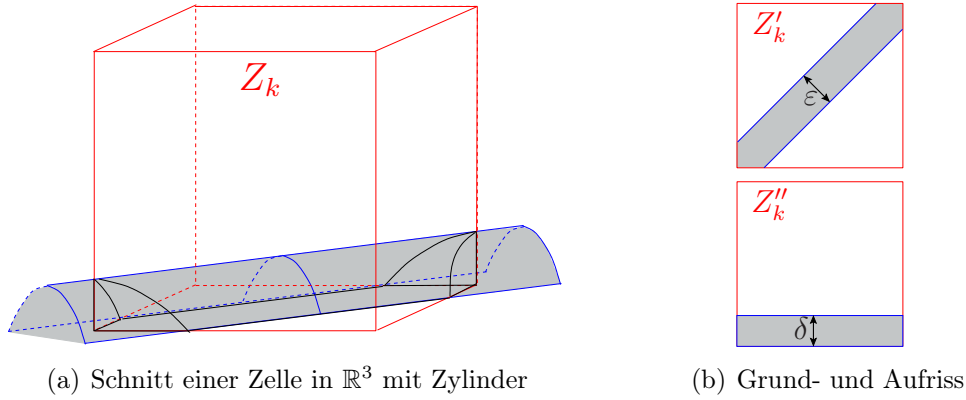


Abbildung 4.22: Beispiel in \mathbb{R}^3

Die Höhe des Schnittes sei δ und die Breite des Streifens des Schnittes mit der unteren Seite von Z_k sei ε . Das heißt, bei dem Blick frontal in die Zelle hat der Gebietsanteil Höhe δ und bei dem Blick direkt von oben, sieht dieser wie ein diagonal verlaufender Streifen der Breite ε aus (siehe Abbildung 4.22(b)).

Sei $|Z_k| = (h_1, h_2, h_3)$, dann hat der Quader R , welcher den Schnitt mit dem Zylinder enthält, die Seitenlängen $|R| = (h_1, h_2, \delta)$. Ein Quader, der vollständig in dem Schnitt mit dem Zylinder liegt, ist in der Höhe durch δ beschränkt. Das Rechteck der Grundfläche muss in den Streifen im Grundriss passen. Das heißt, dass die Länge der Diagonalen d des Rechtecks durch ε begrenzt ist. Damit sind aber auch die Seitenlängen kleiner als ε .

Sei P ein entsprechender Quader mit $|P| = (p_1, p_2, p_3) < (\varepsilon, \varepsilon, \delta)$. Für α mit $\alpha |P| = |R|$ gilt

$$\alpha > \max \left\{ \frac{h_1}{\varepsilon}, \frac{h_2}{\varepsilon}, 1 \right\}.$$

Der B-Spline b_i ist somit nicht α -proper. Eine geringe Höhe δ stellt zwar kein Problem dar, allerdings ist α für kleine ε unbeschränkt.

Die folgende Überlegung zeigt, dass auch uniformes Kondensieren nicht zu einer gleichmäßigen Beschränkung führen kann. Die Höhe des Trägers kann durch das Kondensieren deutlich verringert werden (siehe Abbildung 4.23). Der Grundriss zeigt allerdings, dass das Verhältnis p_1 zu h_1 und p_2 zu h_2 nicht verändert werden kann. Das α von der Größe ε abhängig ist, bleibt somit bestehen.

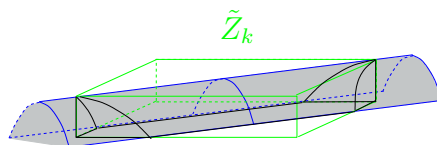


Abbildung 4.23: Kondensierter Träger in \mathbb{R}^3

■

4.3.3 Variante kondensierter B-Splines

Bei dem uniformen Kondensieren wird an die einzelnen Träger die Bedingung gestellt, dass sie uniformen Knotenabstand haben (siehe Konstruktionsregeln 4.1). Da die grundsätzliche Idee des Kondensierens ist, die Träger der B-Splines möglichst stark zu verkleinern beziehungsweise den Anteil des Gebietes am Träger zu optimieren, wird nun diese Bedingung nicht gestellt. Jeder Träger wird einzeln betrachtet und die Linien des Trägers, welche außerhalb des Gebietes liegen, werden soweit zusammengezogen, bis sie das Gebiet berühren. Hierbei können auch mehrfache Knoten entstehen (siehe Abbildung 4.24(b)).

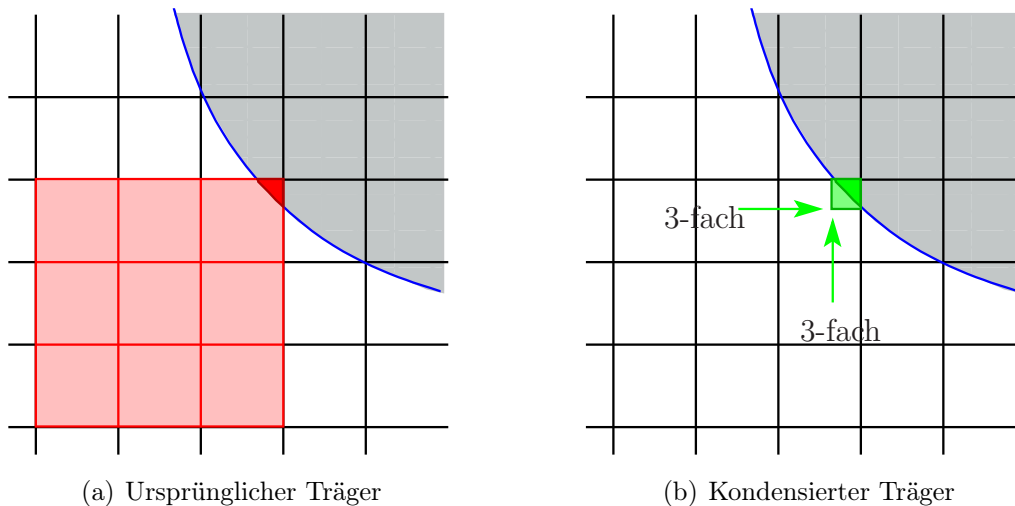


Abbildung 4.24: Variante des uniformen Kondensierens

Die Implementierung dieser Methode liefert die erhofften Ergebnisse. Diese werden in Kapitel 5 Abschnitt 5.1 anhand eines Beispiels dargestellt. Allerdings besteht wenig Hoffnung, alle Fälle, welche bei einem völlig freien Zusammenziehen auftreten können, theoretisch erfassen zu können. Bei dem uniformen Kondensieren liegt eine lokale TP-Struktur (siehe (4.9)) vor. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist selbst diese lokale Struktur ohne die Bedingung der Uniformität nicht erkennbar.

Beispiel 4.52. Die in Abbildung 4.25(a)-4.25(c) markierten TPB-Splines sollen kondensiert werden, ohne dabei den uniformen Knotenabstand zu erhalten. Die jeweiligen resultierenden B-Splines sind in den Abbildungen 4.26(a)-4.26(c) dargestellt.

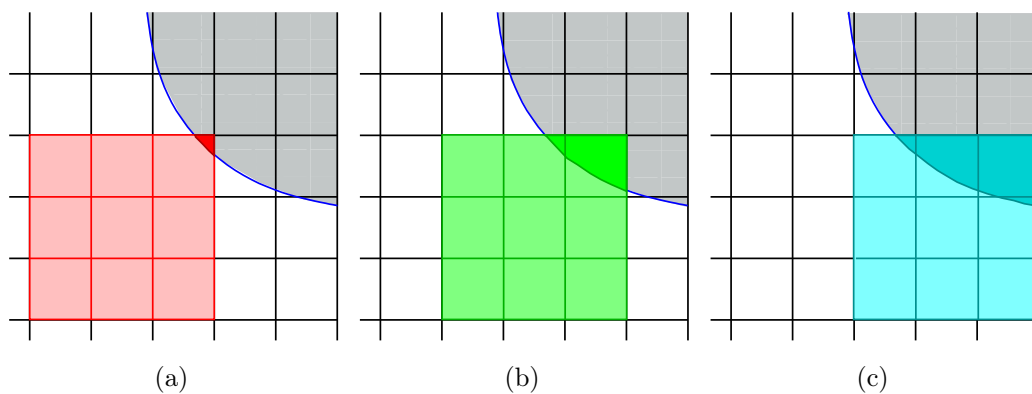


Abbildung 4.25: TPB-Splines

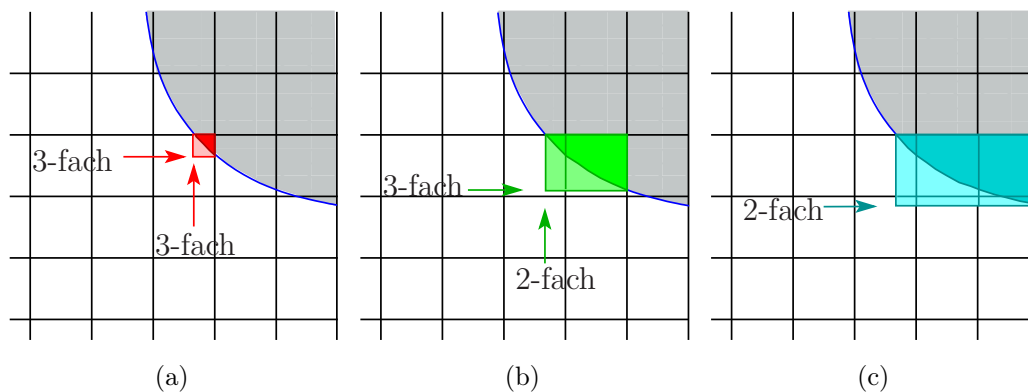


Abbildung 4.26: Kondensierte B-Splines

Die rot markierten B-Splines sind Rand-B-Splines. Für diese gilt nach Korollar 4.5, dass sie nach Normierung unabhängig von der Lage der Knoten außerhalb des Gebietes sind. Wenn dies hier auch der Fall ist, dann wäre dieser B-Spline unproblematisch und bezüglich einer beliebigen Knotenfolge berechenbar. Sei $b_{1,i}(x)$ der univariate B-Spline zu den Knoten $(t_1, t_2, \dots, t_{1+n_1})$ und $\tilde{b}_{1,i}(x)$ der kondensierte B-Spline zu den Knoten $(t_{1+n_1} - \tilde{h}, \dots, t_{1+n_1} - \tilde{h}, t_{1+n_1})$. Für $x \in (t_{1+n_1} - \tilde{h}, t_{1+n_1})$ gilt

$$\tilde{b}_{1,i}(x) = \frac{h^{n_1-1}(n_1-1)!}{\tilde{h}^{n_1-1}} b_{1,i}(x)$$

mit $h := t_2 - t_1$. Damit gilt nach Normierung auch hier, dass der Wert des B-Splines im Gebiet unabhängig von den Knoten außerhalb des Gebietes ist.

Die Rand-B-Splines stellen somit kein Problem dar. Allerdings ist das bei den übrigen B-Splines nicht der Fall. Der Vergleich der in y -Richtung kondensierten Knoten des grün markierten Trägers in Abbildung 4.26(b) und des blau markierten Trägers in Abbildung 4.26(c) zeigt, dass hier lokal keine einheitliche Knotenfolge zugrunde liegen kann. Der selbe Effekt tritt auch in x -Richtung auf, wenn statt des blauen Trägers der Träger gewählt wird, welcher direkt über dem grünen liegt. ■

5 Beispiele

Anhand einiger Beispiele wird die Gültigkeit der theoretischen Resultate in dem vorangegangenen Kapitel getestet. Im Speziellen werden die drei Problempunkte, welche am Ende von Abschnitt 2.3.3 benannt wurden, bezüglich der unterschiedlichen in der Arbeit erwähnten Methoden untersucht.

1. Instabilität der B-Spline-Basis:
Über dem Einheitskreis wird mit den verschiedenen Methoden eine konstante Funktion approximiert und schließlich werden die Konditionszahlen verglichen.
2. Verlust an Approximationsordnung:
Über einem Gebiet, dessen Rand nicht zu der Klasse Lip 1 gehört, wird die Approximationsordnung der verschiedenen Methoden verglichen.
3. Abhängigkeit von den Knotengittern:
Über einem Gebiet mit Rand der Klasse Lip 1 wird die Abhängigkeit des Fehlers von dem Verhältnis der Gitterweiten überprüft.

Die im vorangegangenen Kapitel in Abschnitt 4.3.3 dargestellte Variante des Kondensierens wird bei der Betrachtung der Konditionszahlen eingeschlossen. Sie wird hier mit νK beziehungsweise die Basiselemente werden mit $\nu k B$ -Splines bezeichnet. Aufgrund der Problematik bei der mathematischen Umsetzung wurde diese Methodik allerdings nicht weiter verfolgt und somit das Duplizieren beziehungsweise die Anwendung auf nicht-konvexen Gebieten nicht implementiert.

Die Implementierung wurde in Matlab umgesetzt. Auf eine Beschreibung der Programme wird verzichtet. Als Grundlage diente das Programmpaket von Bernhard Mößner [42]. Hier sind sowohl die Auswertung der erweiterten, normierten und klassischen B-Splines implementiert. Die Modifikation der (lokal) uniform kondensierten B-Splines benötigt im Wesentlichen ein weiteres Programm, welches das Kondensieren ausführt.

In diesem Kapitel werden mit den ukB -Splines beziehungsweise $lukB$ -Splines, die normierten $(l)ukB$ -Splines bezeichnet.

5.1 Stabilität auf der Kreisschreibe

In dem in diesem Abschnitt beschriebenen Beispiel wird die Einheitskreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ betrachtet. Das Anfangsgitter sei hier $T = T_1 \otimes T_2$ mit $T_1 := \{x_0 + k \cdot \frac{1}{2}\}$ und $T_2 := \{y_0 + k \cdot \frac{1}{2}\}$ für $k \in \mathbb{Z}$ bezüglich des Anfangspunktes $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, 0.3)$.

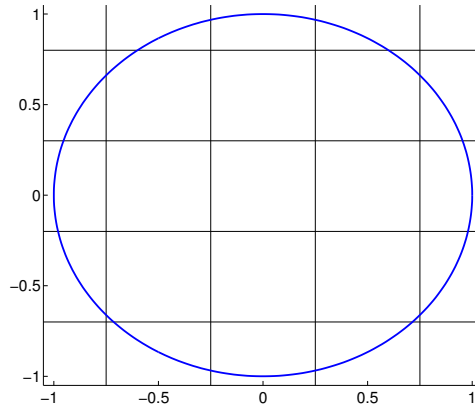


Abbildung 5.1: Anfangskonstellation

Für diese Konstellation sollen die Konditionszahlen der Gram-Matrix zu den

- TPB-Splines,
- normierten B-Splines (nB-Splines),
- normierten B-Splines mit entfernten instabilen B-Splines (n*B-Splines),
- eB-Splines,
- ukB-Splines und
- vkB-Splines

verglichen werden. Aus theoretischer Sicht sind die TPB-Splines und auch die nB-Splines bei ungünstiger Konstellation von Gebiet und Gitter instabil. Um sehen zu können, wann und wie oft diese Problematik entsteht, wird das Anfangsgitter verschoben. In diesem Beispiel wird x_0 dafür in 32 gleichmäßigen Schritten auf $\frac{1}{2}$ verschoben. Für die Approximation werden hier Basiselemente der Ordnung $(3, 3)$ gewählt. Interessant ist nun, wie sich die Konditionszahlen

verändern. Dies ist in Abbildung 5.2 dargestellt, wobei auf der x -Achse die Verschiebung der x_0 -Positionen aufgetragen ist.

Sowohl bei den TPB-Splines (dunkelgrüner Graph) als auch bei den nB-Splines (türkiser Graph) treten, wie erwartet, sehr hohe und letztlich unbeschränkte Konditionszahlen auf. Diese entstehen unter anderem durch die B-Splines zu den in Abbildung 5.3 markierten Trägern, die ungünstige Schnitte mit dem Gebiet aufweisen.

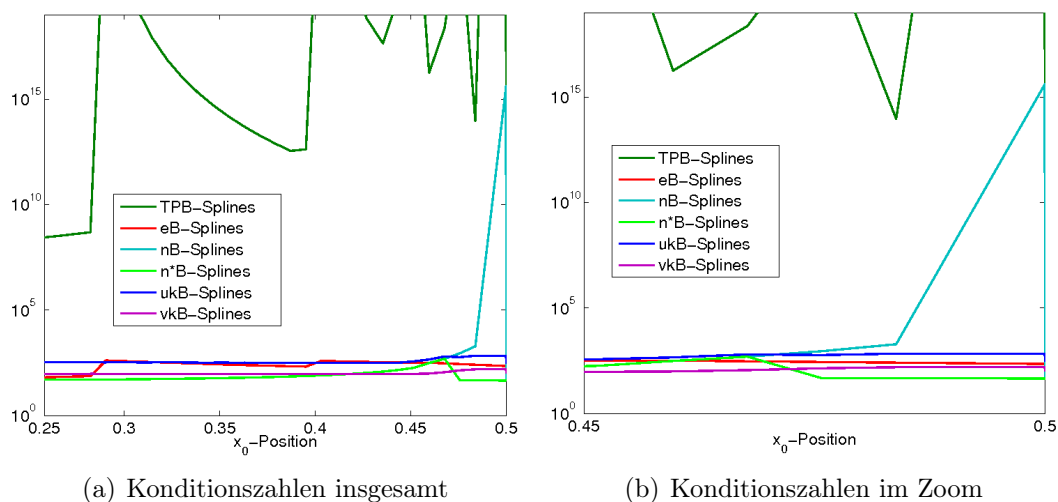


Abbildung 5.2: Konditionszahlen über dem Kreis

Der Träger des B-Splines, welcher trotz Normierung zu einer unbeschränkten Konditionszahl führt, ist in 5.3(b) dargestellt. Dieser entsteht im 31ten Verschiebungs-Schritt und sorgt für den in der Graphik zu den nB-Splines in Abbildung 5.2 sichtbaren Peak. Wird der ‚instabile‘ B-Spline einfach aus der Konstruktion entfernt, so entsteht eine stabile Basis (hellgrüner Graph).

Die Verfahren Erweitern (roter Graph) und Kondensieren (blauer Graph) weisen eine gleichmäßig beschränkte Konditionszahl auf. Auch die in Kapitel 4 Abschnitt 4.3.3 erwähnte Variante (violetter Graph) des Kondensierens führt zu einer stabilen Basis.

Das Problem der Instabilität wird von mehreren Methoden behoben. Der Vergleich der ukB-Splines und der vkB-Splines zeigt, dass beide Basen eine gleichmäßig beschränkte Konditionszahl haben. Zwar ist die Konditionszahl der vkB-Splines kleiner, doch sind die Größen vergleichbar und der wesentliche Punkt der gleichmäßigen Beschränktheit ist erfüllt.

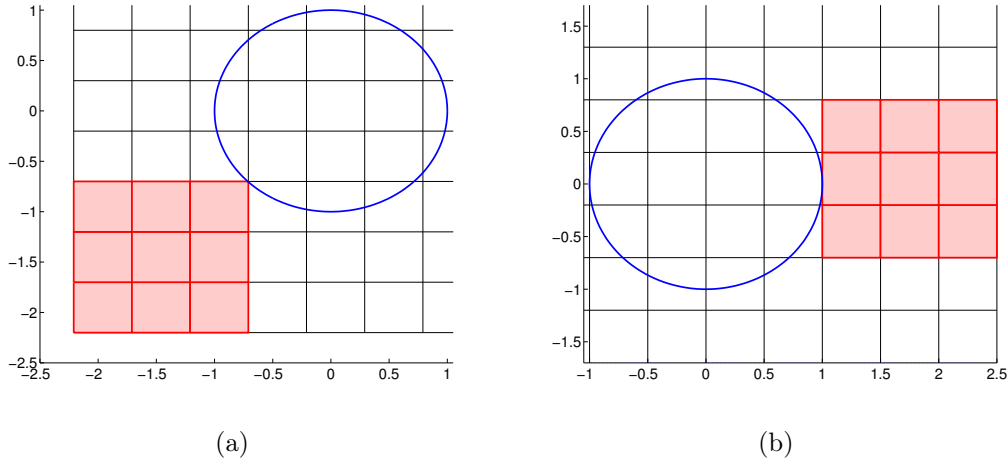


Abbildung 5.3: Kritische Träger

5.2 Approximation

Aufgrund der fehlenden Struktur der vkB-Splines wurde dieses Verfahren nicht weiter verfolgt und die Approximationseigenschaften werden nur bezüglich der ukB-Splines beziehungsweise im nicht-konvexen Fall bezüglich der lukB-Splines untersucht.

In diesem Abschnitt steht die anisotrope Abschätzung des Fehlers

$$\inf_s \|f - s\|_{p,\Omega} \leq c (h_1^{n_1} \|\partial_1^{n_1} f\|_{p,\Omega} + h_2^{n_2} \|\partial_2^{n_2} f\|_{p,\Omega}) \quad (5.1)$$

im Zentrum. Hierzu wird anhand zweier Beispiele die Approximation mit den eB-Splines, TPB-Splines und lukB-Splines untersucht. Reines Normieren ändert die Approximationseigenschaften verglichen mit den TPB-Splines nicht. Das Problem, dass Träger existieren, die mehrere nichtzusammenhängende Schnitte mit dem Gebiet haben und somit keine volle Approximationskraft erreichen können (siehe Beispiel 2.29 und 2.30), besteht nach wie vor. Daher werden sowohl die nB-Splines als auch die n*B-Splines nicht weiter betrachtet.

Das erste Beispiel bezieht sich auf die Problematik, dass die Approximation mit TPB-Splines auf Gebieten, deren Rand nicht in Lip 1 liegt, zu einem Verlust der Approximationsordnung führt (siehe Beispiel 2.29). Die Überlegungen in Kapitel 4 Abschnitt 4.3.1 zeigen, dass dies für die Approximation mit lukB-Splines nicht zutrifft.

In dem Beispiel in Abschnitt 5.2.2 wird schließlich die Abhängigkeit der Konstanten c von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen untersucht.

5.2.1 Approximationsordnung

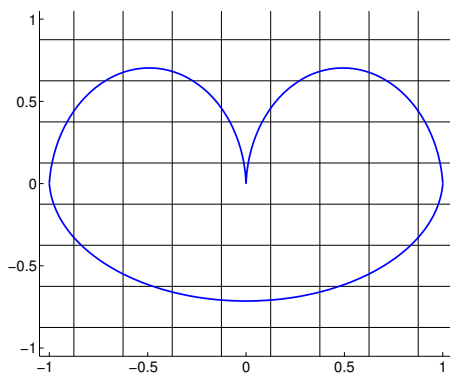
Gegeben ist ein Gebiet G (siehe Abbildung 5.4(a)). Darüber werden nacheinander die TP-Gitter $T^i = T_1^i \otimes T_2^i$ mit

$$T_1^i = T_2^i = \left\{ \frac{h^i}{2} \pm k \cdot h^i \right\} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \text{ und } h^i = \frac{1}{2^i}, i = 1, \dots, 6,$$

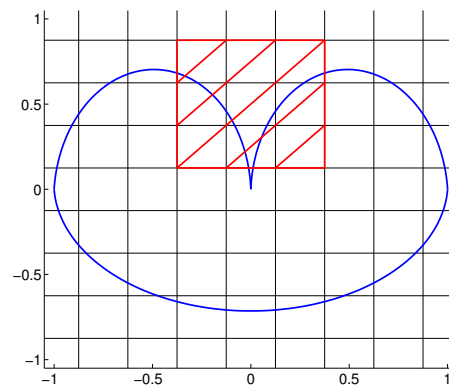
betrachtet. Das heißt, die Gitterweite wird in 6 Schritten von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{64}$ verfeinert. In jedem Schritt soll die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^n & x \leq 0, y \geq 0 \\ y^n & x > 0, y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

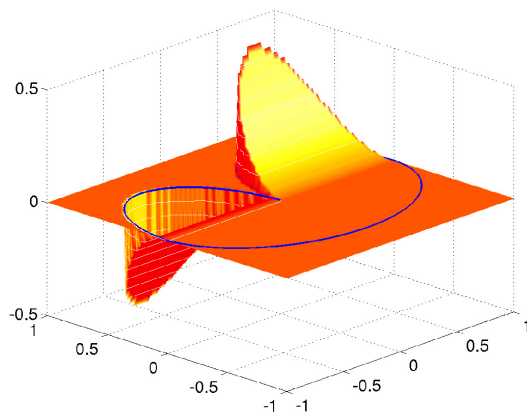
approximiert werden.



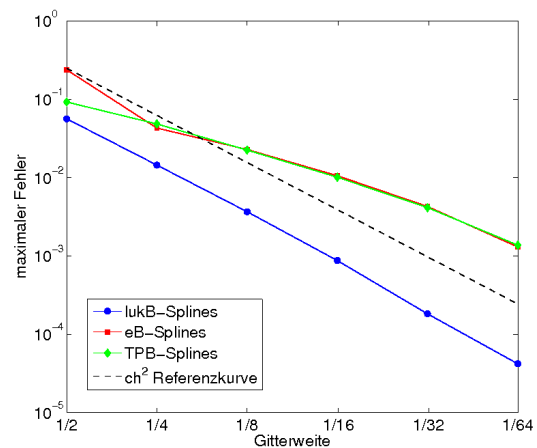
(a) Betrachtetes Gebiet



(b) Problembereich



(c) Zu approximierende Funktion



(d) Vergleich der verschiedenen Methoden

Abbildung 5.4: Approximation der Ordnung 2

Wird die Ordnung $\mathbf{n} = (2, 2)$ mit $n = 2$ gewählt, ist der schraffierte Bereich in Abbildung 5.4(b) kritisch. TPB-Splines, deren Träger vollständig in diesem Bereich liegen, besitzen zwei nicht zusammenhängende Schnitte mit dem Gebiet. Aufgrund der Wahl der betrachteten Funktion (siehe Abbildung 5.4(c)) ist eine optimale Approximationsordnung in der anisotropen Abschätzungsweise (5.1) nicht möglich. Dies ist auch in Abbildung 5.4(d) erkennbar; der grüne Graph zeigt die Approximation mit den TPB-Splines. Hierbei wurde nach einer L_2 -Approximation der l_∞ -Fehler bei jeder Gitterweiten-Verfeinerung ($h^i = \frac{1}{2^i}$) bestimmt.

Auch die Approximation mit den eB-Splines liefert nicht die erwünschte Konvergenzrate, was im Vergleich mit der schwarzen gestrichelten Kurve deutlich wird. Einzig das Verfahren der lukB-Splines erfüllt neben der isotropen auch die anisotrope Fehlerabschätzung.

Dasselbe Phänomen ist bei der Approximation der Ordnung $n = 3$ und $n = 4$ (siehe Abbildung 5.5) erkennbar; hier ist die Abweichung bei den Verfahren der TPB-Splines und eB-Splines sogar noch ausgeprägter.

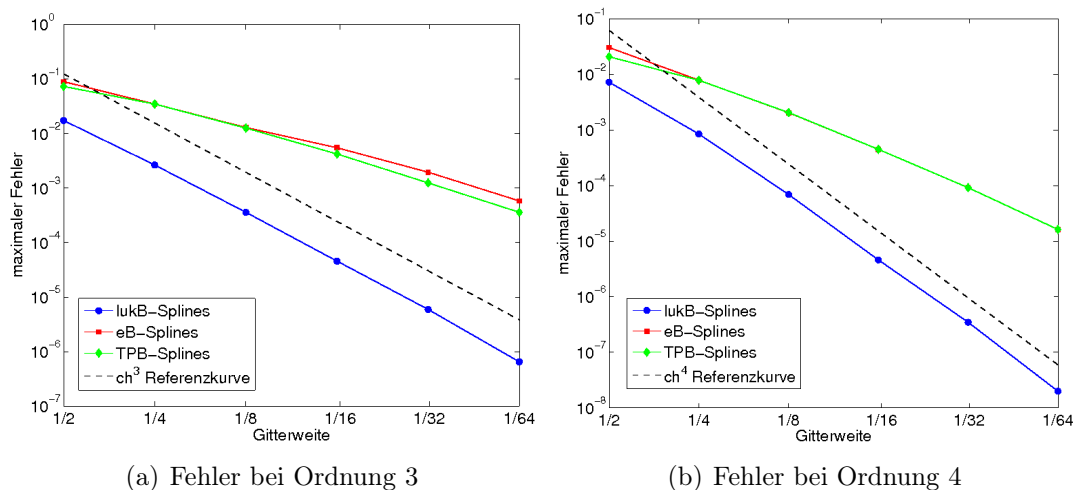


Abbildung 5.5: Fehler höhere Ordnungen

5.2.2 Unabhängigkeit von den Gitterweiten

In dem vorangegangenen Beispiel konnte gezeigt werden, dass die optimale Konvergenzrate über einem Gebiet, dessen Rand nicht zu der Klasse Lip 1 gehört, nur von den lukB-Splines erreicht wird. Allerdings ist die Menge der Gebiete mit Rand der Klasse Lip 1 durchaus groß genug.

In diesem Abschnitt wird anhand der Approximation über dem in Abbildung 5.6

gegebenen Gebiet gezeigt, dass die schon in Kapitel 2 Abschnitt 2.3.3 dargestellte Abhängigkeit der Konstanten der anisotropen Fehlerabschätzung (5.1) von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterrechtecke bei den lukB-Splines nicht mehr auftritt.

Erneut soll die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^n & x \leq 0, y \geq 0 \\ y^n & x > 0, y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

approximiert werden. Für $n = 2$ ist diese in Abbildung 5.7(a) dargestellt. Nun wird allerdings eine Verfeinerung des Gitters betrachtet, bei welcher die Gitterweite in einer Richtung (h_2) verfeinert wird und in der anderen Richtung ($h_1 = 1$) fixiert bleibt. Das heißt, es werden die Gitter $T^i = T_1 \otimes T_2^i$ mit $T_1 = \{\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots\}$ und

$$T_2^i = \{\dots, -2h_2^i, -h_2^i, 0, h_2^i, 2h_2^i, \dots\} \quad \text{mit } h_2^i = \frac{1}{2^i}, i = 1, \dots, 6,$$

verwendet. In Abbildung 5.6(a)-5.6(c) sind die ersten drei Gitter dargestellt.

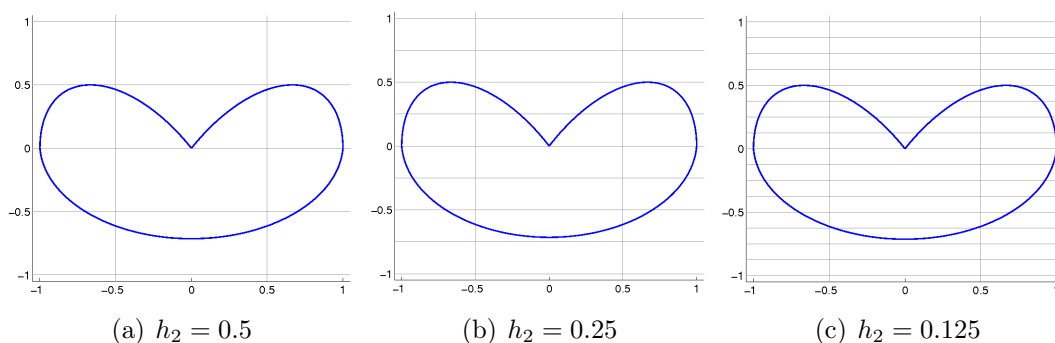
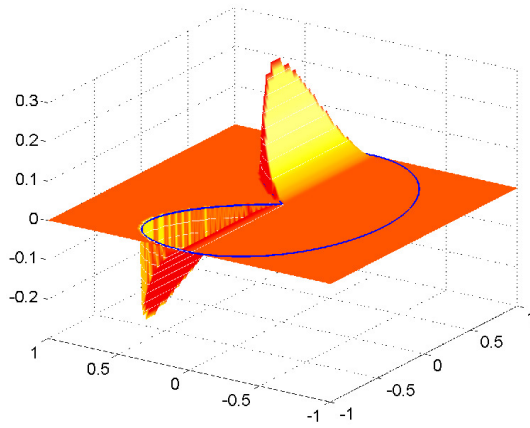
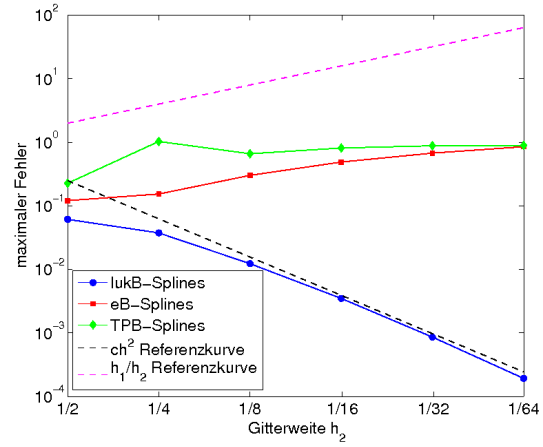


Abbildung 5.6: Gebiet mit Verfeinerung von h_2

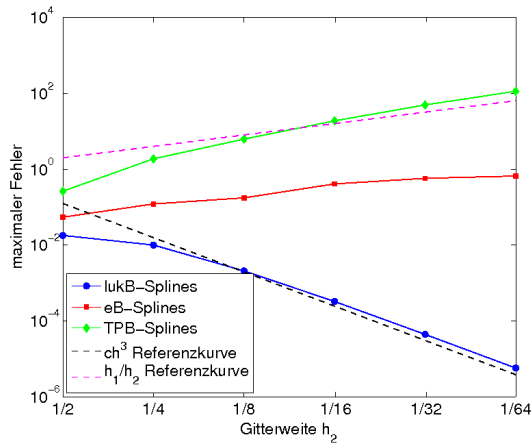
In Abbildung 5.7 ist der maximale Fehler (l_∞ -Fehler) der Approximation mit TPB-Splines, eB-Splines und lukB-Splines der Ordnung $\mathbf{n} = (n, n)$ für $n = 2, 3, 4$ abgebildet. Analog zu den Ergebnissen in Abschnitt 5.2.1 ist erkennbar, dass nur die Methode der lukB-Splines die gewünschte Konvergenzrate erreicht. Die gestrichelte magenta-farbene Gerade zeigt das Wachstum des Quotienten h_1/h_2 an. Sowohl die TPB-Splines als auch die eB-Splines weisen die Abhängigkeit von diesem Quotienten auf.



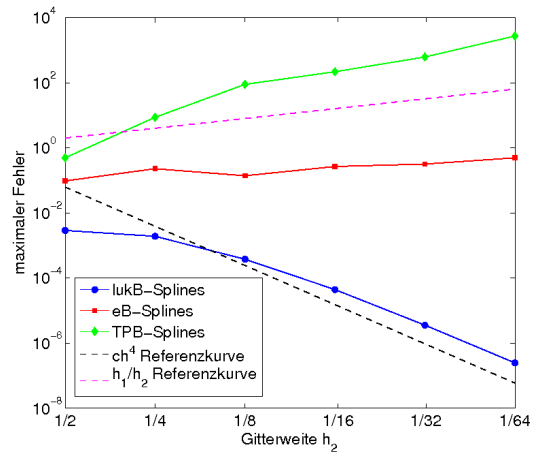
(a) Funktion für Ordnung 2



(b) Fehler bei Ordnung 2



(c) Fehler bei Ordnung 3



(d) Fehler bei Ordnung 4

Abbildung 5.7: Abhängigkeit der Konstanten in der Fehlerabschätzung der Approximation

Die beiden Beispiele zeigen, dass die Approximation mit den lukB-Splines die einzige der hier verglichenen Methoden ist, die neben einer stabilen Basis auch die anisotrope Fehlerabschätzung (5.1) liefert. Zusätzlich ist auch die unangenehme Abhängigkeit von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen nicht länger vorhanden.

6 Fazit und Ausblick

Im Fokus dieser Arbeit steht die Idee, das univariate Konzept der Splineapproximation bezüglich der Basis aus B-Splines durch Tensorproduktbildung in den multivariaten Fall zu übertragen. Dabei steht die Approximation von Funktionen f aus anisotropen Sobolevräumen $W_p^{\mathbf{n}}(\Omega)$ über beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, sowie die Frage, ob eine von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen unabhängige Fehlerabschätzung der Form

$$\inf_{s \in \mathcal{S}_{\mathbf{n}}} \|f - s\|_{p,\Omega} \leq c \cdot \sum_{i=1}^d h_i^{n_i} \|\partial_i^{n_i} f\|_{p,\Omega}$$

möglich ist, im Blickfeld.

Hierbei wurde zuerst die Problematik außer Acht gelassen, dass die klassischen Tensorprodukt-B-Splines eventuell Instabilitäten aufweisen, und versucht, die Fehlerabschätzung in der gewünschten Form für eine möglichst große Klasse an Gebieten zu erzeugen. Auf rechteckigen Gebieten $R \subset \mathbb{R}^d$ beziehungsweise dem gesamten \mathbb{R}^d liegt die gewünschte Abschätzung vor. Der Fehler, welcher über Ω entsteht, kann durch den Fehler über $R \supset \Omega$ oder \mathbb{R}^d abgeschätzt werden, wenn ein entsprechender beschränkter Fortsetzungsoperator existiert. Die Abhängigkeit von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen wird auf diese Weise eliminiert. Jedoch kann die schöne Struktur der rechten Seite der Abschätzung nicht erhalten werden. Des Weiteren wird bei steigender Anisotropie, das heißt, je stärker die Ordnungen n_i , $i = 1, \dots, d$, sich unterscheiden, die Klasse der Gebiete Ω , für welche ein Fortsetzungsoperator existiert, immer kleiner. Alles in allem ist dies eine interessante Idee, welche allerdings keine ausreichende Lösung des Problems darstellt.

Im zweiten Teil der Arbeit wird schließlich das Problem im Kern angegangen. Es wird ausgehend von den Tensorprodukt-B-Splines in \mathbb{R}^2 eine Basis konstruiert, welche die folgenden zu lösenden Problem behebt:

Die klassischen Tensorprodukt-B-Splines weisen bei ungünstiger Lage des Gitters unbeschränkte Konditionszahlen auf. B-Splines mit sehr kleinen Schnitten zwischen Träger und Gebiet erzeugen diese Instabilität. Die gewünschte Abschätzung des Fehlers wird hier nur auf einer geringen Klasse an Gebieten erreicht, welche unter anderem koordinatenweise konvex sein müssen. Zusätzlich

ist nur auf konvexen Gebieten eine beliebige Wahl der Gitterweiten in den verschiedenen Richtungen erlaubt. Bei nicht konvexen Gebieten führt die Anhängigkeit der Konstanten von dem Seitenlängenverhältnis der Gitterzellen zu einer eingeschränkten Menge an Gitterweiten.

Das Problem der Instabilität durch zu kleine Schnitte kann durch das Konzept der erweiterten B-Splines gelöst werden. Nach wie vor werden Tensorprodukt-B-Splines verwendet; die problematischen B-Splines werden durch eine Linearkombination an die unproblematischen inneren B-Splines gekoppelt. Allerdings entsteht durch die Ankopplung ein Nachteil der erweiterten B-Splines, denn diese bewirkt, dass die Splineräume, welche durch Verfeinerungen des Gitters entstehen, nicht länger ineinander geschachtelt sind. Auch die Idee, die Tensorprodukt-B-Splines zu normieren, führt meist zu einer stabilen Basis. Allerdings sind für beide Verfahren die Abschätzungen des Fehlers bisher nur für die klassischen Sobolevräume bekannt und die Abhängigkeit der Konstanten in der Abschätzung von dem Verhältnis der Gitterweiten besteht noch immer.

Das neue Verfahren des (lokalen) uniformen Kondensierens behebt diese Probleme. Die Grundidee ist, dass jeder Träger einzeln so zusammengezogen wird, dass der Anteil des Gebietes in jedem Träger optimiert wird. Dies führt zu stabilen B-Splines. Existieren mehrere nicht zusammenhängende Schnitte von Gebiet und Träger, so wird der Träger entsprechend oft vervielfältigt und schließlich wird für jeden einzelnen Schnitt das Zusammenziehen durchgeführt. Allerdings führt dies zu einer fehlenden Tensorprodukt-Struktur, was eine mathematische Analyse der Eigenschaften der neuen Basis schwierig macht. Es hat sich jedoch gezeigt, dass eine Kombination aus Kondensieren und Normieren dieses Problem löst und eine lokale Tensorprodukt-Struktur erzeugt werden kann.

Hierbei ist besonders wichtig, dass die Vorteile der Tensorprodukt-B-Splines erhalten bleiben. Das heißt, dass zum einen die einfache Struktur erhalten bleibt und somit einfache Auswertungsverfahren möglich sind und zum anderen die Splineräumen bezüglich unterschiedlicher Gitterweiten nach wie vor ineinander geschachtelt sind. Auch die Kompaktheit der Träger bleibt gewährleistet.

Ein bestehendes Problem ist, dass diese Methode zwar in beliebigen Dimensionen angewendet werden kann, hier allerdings schon einfache Beispiele zeigen, dass für $\dim \geq 3$ kein Gewinn im Vergleich zu dem Normieren erzielt wird. Somit ist das lokale uniforme Kondensieren eine wunderbare Methode für Gebiete in \mathbb{R}^2 , scheint aber in höheren Dimensionen ungeeignet zu sein.

Im bivariaten Fall bleiben bezüglich der normierten lokal uniform kondensierten B-Splines beziehungsweise Splines im Wesentlichen drei Probleme offen:

- In der Arbeit wurde gezeigt, dass das Einschränken des Splineräumes der Tensorprodukt-B-Splines über \mathbb{R}^2 auf ein Gebiet Ω zu einem zu kleinen Splineräum führt. Zum Beispiel führt das reine Einschränken dazu, dass die Splines auch auf einem gewissen Bereich außerhalb des Gebietes stückweise polynomial sind, was nicht notwendig ist. Der größte Splineräum

über Ω ist

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}(T, \Omega) := \{s : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : s|_{Z_{\mathbf{k}} \cap \Omega} \in \mathbb{P}_{\mathbf{n}}(Z_{\mathbf{k}} \cap \Omega) \text{ für } \mathbf{k} \in K \text{ und} \\ s^{(\boldsymbol{\alpha})} \in C(\Omega) \text{ für alle } \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{n} - 2\}.$$

Wie hier gezeigt werden konnte, ist der Splineraum $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}$ der normierten lokal uniform kondensierten B-Splines für die zu lösenden Probleme groß genug. Es ist allerdings nicht klar, ob er über nicht konvexen Gebieten dem Splineraum $\hat{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}$ entspricht.

- Anhand eines Beispiels wurde gezeigt, dass die Bedingung, dass der Rand des Gebietes zu der Klasse $\text{Lip } 1$ gehört, vermutlich zu strikt ist. Interessant wäre zu überprüfen, wie weit diese Bedingung abgeschwächt werden und somit die Klasse der möglichen Gebiete vergrößert werden kann.
- Ein weiterer Punkt, welcher bisher noch nicht geklärt werden konnte, ist, ob für beliebige Ω mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ und $f^{\nu} \in W_p^{\mathbf{n}-\nu}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\inf_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}} \|(f - s)^{\nu}\|_{p, \Omega} \leq c \cdot (h_1^{n_1 - \nu_1} \|\partial_1^{n_1} \partial_2^{\nu_2} f\|_{p, \Omega} + h_2^{n_2 - \nu_2} \|\partial_1^{\nu_1} \partial_2^{n_2} f\|_{p, \Omega})$$

gilt. Dieses Resultat konnte hier zumindest für Rechtecke gezeigt werden.

Die Splineapproximation über Tensorprodukt-Gittern wird unter anderem für die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mittels der Methode der Finiten Elemente ausgenutzt. Nun treten bei der Verwendung der klassischen Tensorprodukt-B-Splines zum einen aufgrund der Instabilität und zum anderen bei der Einhaltung der Randbedingungen Probleme auf. Die Methode der weB-Splines löst in vielen Fällen diese Problematik. Durch das Erweitern wird eine stabile Basis erzeugt und durch eine geeignete Gewichtsfunktion kann die Randbedingung erfüllt werden. Allerdings treten hier Probleme auf, wenn Multiskalen-Methoden zum Einsatz kommen, da die weB-Splineräume nicht ineinander geschachtelt sind. Diese Problematik besteht bei den normierten lokal uniform kondensierten B-Splines und den zugehörigen Splineräumen $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{n}}$ nicht. Es macht also durchaus Sinn, sich damit zu beschäftigen, inwiefern lukB-Splines für die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen eingesetzt werden können. Dazu müsste zuerst untersucht werden, wie Multiskalen-Methoden sich auf diese Basis auswirken. Auch die Anwendung von Gewichtsfunktionen müsste genauer betrachtet werden. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, dass für die normierten B-Splines die Gewichtung schon untersucht wurde (siehe Mößner [42]). Vermutlich lassen sich einige Resultate analog übertragen.

Eine weitere Idee, welche ins Auge gefasst werden könnte, ist die normierten lokal uniform kondensierten B-Splines mit hierarchischen B-Splines (siehe [32])

oder [39]) zu kombinieren. Durch das lokale uniforme Kondensieren und Normieren kann für Ω mit $\partial\Omega \in \text{Lip}_E 1$ eine stabile Anfangsbasis mit den gezeigten Approximationseigenschaften gebildet werden. Anschließend kann dann je nach gegebenen Daten beziehungsweise gegebener Funktion in dem Gebiet über die hierarchischen B-Splines optimiert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ALT, H.W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [2] BESOV, O.V.: The continuation of functions in L^l_p and W^l_p . In: *Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications. Part 2, Work collection* Bd. 89, Trudy Mat. Inst. Steklov., 1967, S. 5–17
- [3] BESOV, O.V. ; IL'IN, V.P.: Natural extension of the class of regions in embedding theorems. In: *Math. USSR Sb.* 4 (1968)
- [4] BESOV, O.V. ; IL'IN, V.P. ; NIKOL'SKIĬ, S.M. ; TAIBLESON, M.H. (Hrsg.): *Integral representations of functions and imbedding theorems*. Bd. 1. V.H. Winston & Sons, 1978
- [5] BOOR, C. de: On calculating with B-splines. In: *J. Approximation Theory* 6 (1972), S. 50–62
- [6] BOOR, C. de: On local linear functionals which vanish at all B-splines but one. In: *Theory of Approximation with Applications*, Academic Press, New York, 1976
- [7] BOOR, C. de: Splines as linear combinations of B-splines. A Survey. In: LORENTZ, G.G. (Hrsg.) ; CHUI, C.K. (Hrsg.) ; SCHUMAKER, L. (Hrsg.): *Approximation Theory, II*. Academic Press, New York, 1976, S. 1–47
- [8] BOOR, C. de: *A Practical Guide to Splines*. Springer, 1978
- [9] BOOR, C. de ; FIX, G.J.: Spline approximation by quasi-interpolants. In: *Journal of Approximation Theory* 8 (1973), S. 19–45
- [10] BOOR, C. de ; HÖLLIG, K. ; RIEMENSCHNEIDER, S.: *Box Splines*. Springer-Verlag (New York), 1993
- [11] BRAMBLE, J.H. ; HILBERT, S.R.: Estimation of linear functionals on So-

- bolev spaces with application to Fourier transforms an spline interpolation. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 7 (1970), Nr. 1, S. 112–124
- [12] BRAMBLE, J.H. ; HILBERT, S.R.: Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. In: *Numer. Math.* 16 (1971), S. 362–369
- [13] BRENNER, S.C. ; SCOTT, L.R.: *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, 1994
- [14] BURENKOV, V.I.: On the extension of functions with preservation and with deterioration of the differential properties. In: *Soviet Math. Dokl.* 16 (1975)
- [15] BURENKOV, V.I.: On the extension of functions with preservation of seminorm. In: *Soviet Math. Dokl.* 17 (1976)
- [16] BURENKOV, V.I.: On a method of extending differentiable functions. In: *Proc. Steklov Inst. Math.* (1979)
- [17] BURENKOV, V.I.: Extension of functions with preservation of Sobolev seminorm. In: *Proc. Steklov Inst. Math.* (1987)
- [18] BURENKOV, V.I. ; FAĬN, B.L.: On the extension of functions from anisotropic spaces with preservation of class. In: *Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications. Part 7, Work collection* Bd. 150, Trudy Mat. Inst. Steklov., 1979, S. 5266
- [19] CHUI, C.K.: *Multivariate Splines*. CBMS-NSF Lectures, SIAM (Philadelphia), 1988
- [20] COX, M.G.: The numerical evaluation of B-splines. In: *J. Inst. Math. App.* 10 (1972), S. 134–149
- [21] DAHMEN, W. ; DE VORE, R. ; SCHERER, K.: Multi-dimensional spline approximation. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 17 (1980), Nr. 3
- [22] DECHEVSKI, L.T. ; QUARK, E.G.: On the Bramble-Hilbert lemma. In: *Numer. Funct. Anal. Optim.* 11 (1990), S. 485–495
- [23] DEKEL, S. ; LEVIATAN, D.: The Bramble-Hilbert lemma for convex domains. In: *SIAM J. Math. Anal.* 35 (2004), S. 1203–1212
- [24] DEVORE, R. ; RICHARDS, F.: Saturation and inverse theorems for spline

- approximation. In: *Spline Functions and Approximation Theory, ISNM* Bd. 21, Birkhäuser Verlag, Basel, 1973, S. 73–82
- [25] DEVORE, R. ; SCHERER, K.: A constructive theory for approximation by splines with an arbitrary sequence of knot sets. In: *Approximation Theory, Lecture Notes in Mathematics* Bd. 554, Springer Verlag, New York, 1977, S. 167–183
- [26] DUPONT, T. ; SCOTT, R.: Constructive polynomial approximation in Sobolev spaces. In: BOOR, C. de (Hrsg.) ; GOLUB, G. (Hrsg.): *Recent Advances in Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1978, S. 31–44
- [27] DUPONT, T. ; SCOTT, R.: Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. In: *Math. Comp.* 34 (1980), S. 441–463
- [28] DURÁN, R.G.: On polynomial approximation on Sobolev spaces. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 20 (1983), S. 985–988
- [29] FAÏN, B.L.: Extension of functions from Sobolev spaces for nonregular domains, with preservation of the indicator of smoothness. In: *Soviet Math. Dokl.* 32 (1985)
- [30] FAÏN, B.L.: Extension of functions in anisotropic Sobolev spaces. In: *Proc. Steklov Inst. Math.* (1987)
- [31] GLUSHKO, V.P.: On regions which are starlike with respect to a ball. In: *Soviet Math. Dokl.* 3 (1962)
- [32] HÖLLIG, K.: *Finite Element Methods with B-Splines*. SIAM, 2003
- [33] HÖLLIG, K. ; REIF, U.: Nonuniform WEB-Splines. In: *Computer Aided Geometric Design* 20(5) (2003), S. 277–294
- [34] HÖLLIG, K. ; REIF, U. ; WIPPER, J.: Error Estimates for the WEB-Method. In: *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000*, Vanderbilt University Press, 2001, S. 195–209
- [35] HÖLLIG, K. ; REIF, U. ; WIPPER, J.: Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 39(2) (2001), S. 442–462
- [36] HÖLLIG, K. ; REIF, U. ; WIPPER, J.: Multigrid methods with web-splines. In: *Numer. Math.* 91(2) (2002), S. 237–256

- [37] HOSCHEK, J. ; LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B. G. Teubner Stuttgart, 1989
- [38] JONES, P.W.: Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. In: *Acta Math.* 147 (1981)
- [39] KRAFT, R.: *Adaptive und linear unabhängige multilevel B-Splines und ihre Anwendungen*, Universität Stuttgart, Diss., 1998
- [40] LAI, M. ; SCHUMAKER, L.: On the approximation power of bivariate splines. In: *Advances in Computational Mathematics* 9 (1998), S. 251–279
- [41] LYCHE, T. ; PEÑA, J.M.: Optimally Stable Multivariate Bases. In: *Advances in Computational Mathematics* 20 (2004), S. 149–159
- [42] MÖSSNER, B.: *B-Splines als Finite Elemente*, TU-Darmstadt Fachbereich Mathematik, Diss., 2006
- [43] MÖSSNER, B. ; REIF, U.: Stability of tensor product B-splines on domains. In: *Journal of Approximation Theory* (2008)
- [44] REIF, U.: Uniform B-spline approximation in Sobolev spaces. In: *Numerical Algorithms* 15 (1997), S. 1–14
- [45] REIF, U.: *Polynomial approximation on domains bounded by diffeomorphic images of graphs*. 2010. – (preprint)
- [46] RUNGE, C.: Über die Darstellung willkürlicher Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. In: *Z. Angew. Math. Phys.* (1901), Nr. 46, S. 224–243
- [47] SCHERER, K.: Optimal degree of approximation by splines. In: *Optimal Estimation in Approximation Theory*, Plenum Press, New York, 1977, S. 139–149
- [48] SCHOENBERG, I.J.: Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. In: *Quart. Appl. Math.* 4 (1946), S. 45–99, 112–141
- [49] SCHOENBERG, I.J.: On spline functions. In: *Inequalities*. Ed. Academic Press, New York, 1967, S. 255–291
- [50] SCHUMAKER, L.: *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley-Interscience, New York, 1980

- [51] SEDERBERG, T.W. ; ZHENG, J. ; BAKENOV, A. ; NASRI, A.: T-splines and T-NURCCs. In: *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*. New York, NY, USA : ACM, 2003 (SIGGRAPH '03), S. 477–484
- [52] SMITH, K.: Inequalities for formally positive integro-differential forms. In: *Bull. A.M.S.* 67 (1961), S. 368–370
- [53] SMITH, K.: Formulas to represent functions by their derivatives. In: *Math. Ann.* 188 (1970), S. 53–77
- [54] SOBOLEV, S.L.: On a theorem of functional analysis. In: *Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2* 34, S. 39–68
- [55] SOBOLEV, S.L.: Applications of functional analysis in mathematical physics. In: *Transl. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* 7 (1963)
- [56] VERFÜRTH, R.: A note on polynomial approximation in Sobolev spaces. In: *M2AN* 33 (1999), Nr. 4, S. 715–719
- [57] WENDLAND, H.: *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005 (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics)
- [58] WHITNEY, H.: Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 36 (1934)

Wissenschaftlicher Werdegang

	Nada Sissouno
28.04.1981	* in Darmstadt
1987-2000	Schulbesuch in Brensbach und Groß-Bieberau
2000	Abitur an der <i>Albert-Einstein-Schule</i> in Groß-Bieberau
2000-2007	Studium an der <i>TU Darmstadt</i>
2007	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Psychologie an der <i>TU Darmstadt</i> Titel der Diplomarbeit: <i>Charakterisierung von K-Funktionalen in L^1 mittels hypersingulärer Integrale</i> Betreuer: Prof. Dr. Walter Trebels
seit 2007	Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der <i>TU Darmstadt</i>